



Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2009/2010 Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

A döntő feladatai

1. Feladat

Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2 \cos 2x + 2 \sin^2 x}{2 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} + \frac{13 \cos^2 x}{2 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} = 6$$

egyenletet!

2. Feladat

Legyen

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right],$$

ahol n pozitív egész szám.

Bizonyítsa be, hogy a sorozat minden tagja egész szám!

3. Feladat

Az ABC háromszögben

$$BAC\angle = 90^\circ, \quad BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

és a háromszög K -val jelölt területére fennáll, hogy

$$K = \frac{a+b}{c}.$$

a) Számítsa ki $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ értékét a K függvényében! (ahol $\beta = CBA\angle$)

b) K milyen értékeire lesz a β szög az ABC háromszög legkisebb szöge?

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.



Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2009/2010 Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

A döntő feladatainak megoldása

1. Feladat

Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2 \cos 2x + 2 \sin^2 x}{2 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} + \frac{13 \cos^2 x}{2 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} = 6$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználjuk a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, illetve a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ trigonometrikus azonosságokat, ezekkel a kiinduló egyenlet a következőképpen alakítható át:

$$\frac{2 \cdot \cos^2 x}{2 \cdot \cos^4 x - 5 \cdot \cos^2 x + 3} + \frac{13 \cdot \cos^2 x}{2 \cdot \cos^4 x + \cos^2 x + 3} = 6.$$

Vezessük be az

$$y = \cos^2 x$$

jelölést, ezzel egyenletünk a következő alakú lesz:

$$(1) \quad \frac{2 \cdot y}{2 \cdot y^2 - 5 \cdot y + 3} + \frac{13 \cdot y}{2 \cdot y^2 + y + 3} = 6.$$

1 pont

Az (1) egyenletben a törtek nevezői nem lehetnek 0 értékűek, így az első tört miatt:

$$y \neq 1 \text{ és } y \neq \frac{3}{2}.$$

A második tört nevezője minden lehetséges $y \in \mathbb{R}$ értékre nagyobb 0-nál. Így a megoldásra kapott feltétel:

$$(2) \quad y \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}. \quad 1 \text{ pont}$$

Mivel $y \neq 0$, ezért az (1) egyenlet bal oldalán szereplő törtet egyszerűsíthetjük y -nal.

Ekkor:

$$(3) \quad \frac{2}{2 \cdot y - 5 + \frac{3}{y}} + \frac{13}{2 \cdot y + 1 + \frac{3}{y}} = 6. \quad 1 \text{ pont}$$

Legyen

$$2 \cdot y - 5 + \frac{3}{y} = z,$$

ezzel a (3) egyenletből

$$(4) \quad \frac{2}{z} + \frac{13}{z+6} = 6$$

adódik, ahonnan rendezés után

$$(5) \quad 2 \cdot z^2 + 7 \cdot z - 4 = 0$$

következik. (Ez ekvivalens átalakítás, mert $z \neq 0$ és $z \neq -6$) 1 pont

Az (5) egyenlet gyökei: $z_1 = \frac{1}{2}$ és $z_2 = -4$. 1 pont

Elvégezve a visszahelyettesítéseket, $z_2 = -4$ esetén azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot y^2 - y + 3 = 0,$$

ennek az egyenletnek nincs valós megoldása y -ra. 1 pont

Ha $z_1 = \frac{1}{2}$, akkor

$$4y^2 - 11 \cdot y + 6 = 0,$$

ennek az egyenletnek az

$$y_1 = 2 \text{ és az } y_2 = \frac{3}{4}$$

valós számok a megoldásai. (y_1 és y_2 eleget tesz a (2) feltételnek) 1 pont

Nyilvánvaló, hogy $y = \cos^2 x$ miatt $y_1 = 2$ nem ad megoldást x -re. 1 pont

Ha $y_2 = \frac{3}{4}$, azaz

$$\cos^2 x = \frac{3}{4},$$

akkor

$$\cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \cos x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

amiből

$$(6) \quad x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

illetve

$$(7) \quad x_2 = \pm \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in Z$$

adódik.

1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kapott megoldások az eredeti egyenletnek is gyökei.

1 pont

összesen:

10 pont

Megjegyzés:

Ha a $\cos^2 x = a$ és $2 \cos^4 x + 3 = b$ jelölést vezetjük be, akkor (3) helyett a

$$\frac{2a}{b-5a} + \frac{13a}{b+a} = 6$$

egyenletet kapjuk.

Ebből

$$11\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0,$$

azaz

$$\left(\frac{a}{b}\right)_1 = 1, \quad \left(\frac{a}{b}\right)_2 = \frac{2}{11}.$$

Visszahelyettesítve a és b kifejezését a

$$2 \cos^4 x - \cos^2 x + 3 = 0$$

$$4 \cos^4 x - 11 \cos^2 x + 6 = 0$$

egyenletekre jutunk, ami a továbbiakban azonos az 1. megoldásban leírtakkal.

2. Feladat

Legyen

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right],$$

ahol n pozitív egész szám.

Bizonyítsa be, hogy a sorozat minden tagja egész szám!

I. Megoldás:

Alkalmazzuk a binomiális tételt az $(1 + \sqrt{2})^n$ kiszámítására.

Eszerint:

$$(1) \quad (1 + \sqrt{2})^n = \binom{n}{0} \sqrt{2}^0 + \binom{n}{1} \cdot \sqrt{2} + \binom{n}{2} \cdot \sqrt{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot \sqrt{2}^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot \sqrt{2}^n. \quad 1 \text{ pont}$$

(1) jobb oldalán minden tag $\binom{n}{k} \cdot \sqrt{2}^k$ alakú, ahol k természetes szám, és

$$0 \leq k \leq n.$$

Ha k páros természetes szám, azaz $k = 2m$, akkor $(\sqrt{2})^{2m} = 2^m$, vagyis

$\sqrt{2}^k$ értéke pozitív egész szám, ha m nem negatív egész szám.

Ha pedig k páratlan természetes szám, azaz $k = 2t + 1$, akkor, $\sqrt{2}^k = 2^t \cdot \sqrt{2}$, ahol t természetes szám.

Ismeretes, hogy $\binom{n}{k}$ pozitív egész, ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, $n \neq 0$. 1 pont

Előbbi megállapításainkból az következik, hogy (1)-ben kétféle tag fordul elő.

Az egyik típusú tag pozitív egész $\left[\binom{n}{2m} \cdot 2^m \right]$, 1 pont

a másik típusú egy pozitív egész szám és $\sqrt{2}$ szorzata: $\left[\binom{n}{2t+1} \cdot 2^t \cdot \sqrt{2} \right]$.

Ezek összege lesz (1) jobboldala, azaz:

$$(2) \quad (1 + \sqrt{2})^n = a + b \cdot \sqrt{2},$$

ahol az $a; b$ számok pozitív egészek, mivel pozitív egészek összegeként adódnak.

Alkalmazzuk a binomiális tételt $(1 - \sqrt{2})^n$ kiszámításához!

Ezzel:

1 pont

$$(3) \quad (1 - \sqrt{2})^n = \binom{n}{0} \sqrt{2}^0 - \binom{n}{1} \cdot \sqrt{2} + \binom{n}{2} \cdot \sqrt{2}^2 - \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot \sqrt{2}^n.$$

Látható, hogy az (1) és (3) összefüggések jobb oldalain ugyanazok a tagok szerepelnek, de (3)-ban az $\binom{n}{k} \cdot \sqrt{2}^k$ alakú tagok előjele negatív, ha k páratlan természetes szám.

Ebből az következik, hogy

$$(4) \quad (1 - \sqrt{2})^n = a - b \cdot \sqrt{2}.$$

(2) és (4) felhasználásával:

2 pont

$$(5) \quad a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} [(a + b\sqrt{2}) - (a - b\sqrt{2})].$$

Elvégezve a műveleteket, azt kapjuk (5)-ből, hogy

1 pont

$$(6) \quad a_n = b.$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n]$ egész szám.

2 pont

Összesen:

1 pont

Megjegyzés:

10 pont

Ne vonjuk le az első 3 pontot attól, aki az $(1 + \sqrt{2})^n$ polinom alakjának meghatározásához konkrét számítások útján jut el!

II. Megoldás:

Számítsuk ki a sorozat néhány elemét!

$$(1) \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_3 = 5; \quad a_4 = 12; \quad a_5 = 29.$$

(1)-ből azt sejtjük, hogy a sorozatot az

$$(2) \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3),$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2$$

rekurzív formulával is képezhetjük.

Először ezt a sejtést fogjuk bizonyítani.

2 pont

Képezzük a $2a_{n-1} + a_{n-2}$ összeget!

Mivel:

$$a_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1} \right],$$

és

$$a_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n-2} - (1 - \sqrt{2})^{n-2} \right],$$

ezért

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = 2 \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1} \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n-2} - (1 - \sqrt{2})^{n-2} \right].$$

Átalakítva:

1 pont

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[2(1 + \sqrt{2})^{n-1} - 2(1 - \sqrt{2})^{n-1} + (1 + \sqrt{2})^{n-2} - (1 - \sqrt{2})^{n-2} \right]$$

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[2(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-2} - 2(1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-2} + (1 + \sqrt{2})^{n-2} - (1 - \sqrt{2})^{n-2} \right]$$

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n-2} (2 + 2\sqrt{2} + 1) - (1 - \sqrt{2})^{n-2} (2 - 2\sqrt{2} + 1) \right]$$

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n-2} (1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^{n-2} (1 - \sqrt{2})^2 \right]$$

2 pont

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

$$2a_{n-1} + a_{n-2} = a_n$$

Sejtésünk tehát igaz, vagyis a sorozatra teljesül az

2 pont

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

képzési szabály.

Mivel az első két tag pozitív egész, a (2) képzési szabály szerint ezután

minden tagot az előző két tagból egész számmal való szorzással és

1 pont

összeadással képezünk, ezért a sorozat minden tagja valóban egész szám.

Összesen: 2 pont

10 pont

III. Megoldás:

Ezt a bizonyítást teljes indukcióval végezzük el.

$a_1 = 1$, tehát az $n = 1$ értékre az állítás igaz, a_1 egész szám.

Indukciós feltevésünk az, hogy

1 pont

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

egész szám, ha n pozitív egész.

A teljes indukciós bizonyítás azt jelenti, hogy ez az állítás n -ből következik $n+1$ -re is.

A sorozat képzési szabálya szerint írjuk fel a_{n+1} -et:

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right].$$

Bizonyítandó, hogy a_{n+1} egész szám.

(1)-et átalakítva:

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})^n \cdot (1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{2})^n \cdot (1 - \sqrt{2}).$$

Tovább alakítva:

1 pont

$$(3) \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{2} \cdot \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right].$$

(3) szerint

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right],$$

és ebben a_n az indukciós feltevés miatt egész, ezért a továbbiakban azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

egész szám.

1 pont

Az I. megoldásban leírtak (4)-ig terjedő része szerint

$$(1 + \sqrt{2})^n = a + b \cdot \sqrt{2} \text{ és } (1 - \sqrt{2})^n = a - b \cdot \sqrt{2},$$

ahol az a, b számok pozitív egészek.

Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right] = \frac{1}{2} \cdot (a + b \cdot \sqrt{2} + a - b \cdot \sqrt{2}),$$

azaz

$$\frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right] = \frac{1}{2} \cdot 2a = a,$$

tehát

5* pont

$$\frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

valóban egész szám.

Eszerint (3)-ból azt kaptuk, hogy

$$a_{n+1} = a_n + a.$$

Mivel azonban az indukciós feltevés szerint $a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right]$ egész

szám, ezért

$$a_{n+1} = a_n + a$$

is egész szám.

A feladat állítása $n = 1$ értékre teljesül, és bizonyításunk szerint n -ből

1 pont

következik $n + 1$ -re, ezért az állítás minden pozitív egész n számra igaz.

Összesen:

1 pont

10 pont

Megjegyzés:

- III. megoldásban az 5* pontot (teljes egészében) csak akkor kapja meg a versenyző, ha korrekt módon bizonyítja, hogy $(1 + \sqrt{2})^n = a + b \cdot \sqrt{2}$ és $(1 - \sqrt{2})^n = a - b \cdot \sqrt{2}$.

3. Feladat

Az ABC háromszögben

$$\angle BAC = 90^\circ, \quad BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

és a háromszög K -val jelölt területére fennáll, hogy

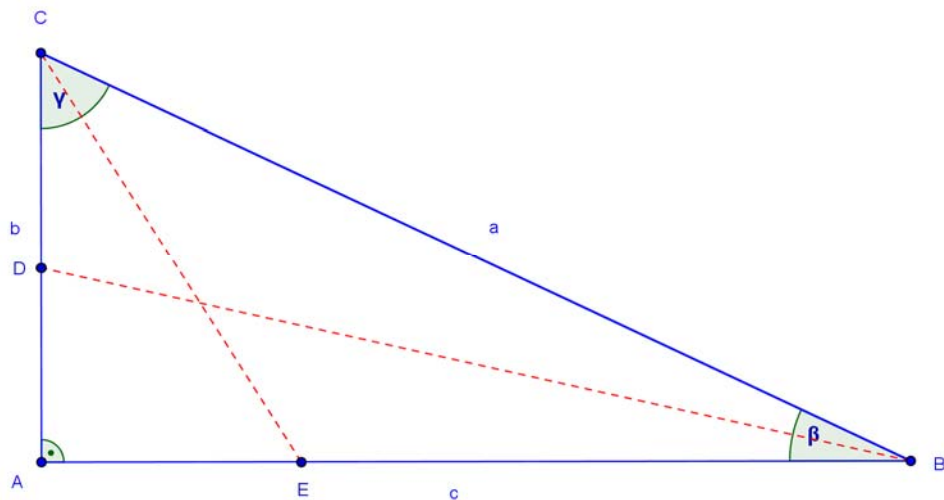
$$K = \frac{a+b}{c} \cdot$$

a) Számítsa ki $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ értékét a K függvényében! (ahol $\beta = \angle CBA$)

b) K milyen értékeire lesz a β szög az ABC háromszög legkisebb szöge?

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók, az ABC háromszögben a BD és CE szakaszok a megfelelő belső szögek (β és γ) felezői.



a)

Az ABD derékszögű háromszögben

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{AD}{c},$$

1 pont

A belső szögfelező tétele miatt

$$\frac{AD}{b-AD} = \frac{c}{a},$$

amiből

$$AD = \frac{b \cdot c}{a+c}.$$

Ezt beírva (1)-be

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{b}{a+c}.$$

1 pont

Továbbá

$$K = a + b + c,$$

és a feltétel szerint

$$K = \frac{a+b}{c}$$

ezért

$$\frac{a+b}{c} = a + b + c$$

amiből

$$(3) \quad a + b = c \cdot (a + b) + c^2$$

adódik.

Az ABC háromszögre érvényes Pitagorasz-tételből azt kapjuk, hogy

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

és szorzattá alakítás után

$$c^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Ezt beírjuk a (3) összefüggésbe és a nyilvánvalóan pozitív $a + b$ tényezővel való osztás után a

$$1 = c + (a - b),$$

átalakítva:

$$(4) \quad a + c = b + 1$$

1 pont

egyenlőségre jutunk.

A $K = a + b + c$ és (4) összevetéséből

$$(5) \quad K = 2b + 1.$$

Innen látszik, hogy

$$K > 1.$$

(ezt egyébként $K = \frac{a+b}{c}$ -ből is látjuk, hiszen a háromszög egyenlőtlenség miatt $a + b > c$).

1 pont

(4)-et beírva (2)-be

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{b}{b+1}.$$

Ugyanakkor (5)-ből

$$b = \frac{K-1}{2},$$

ezt a (6) összefüggésbe írva:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{K-1}{K+1}, \quad (K > 1)$$

ezzel meghatároztuk $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ értékét K függvényében.

1 pont

b)

A háromszög legnagyobb szöge derékszög, ezért a β szög akkor lehet a háromszög legkisebb szöge, ha

$$\beta < \gamma,$$

azaz

$$\frac{\beta}{2} < \frac{\gamma}{2}.$$

Vagyis $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} < \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, hiszen a tangensfüggvény szigorúan monoton növekvő

a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban.

1 pont

Ezért kiszámítjuk $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ -et.

Az ACE derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{AE}{b},$$

és AE -t a szögfelező tételből kiszámítva:

$$AE = \frac{bc}{a+b}.$$

Így

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{a+b},$$

illetve ezt a

$$K = \frac{a+b}{c}$$

feltétellel összevetve

$$(8) \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{K}$$

adódik. (és ez értelmezett, hiszen $K \neq 0$)

1 pont

Beírva (7)-et és (8)-at a

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} < \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \quad \text{összefüggésbe}$$

$$(9) \quad \frac{K-1}{K+1} \leq \frac{1}{K}.$$

A (9) egyenlőtlenségből ekvivalens átalakításokkal (hiszen $K > 1$) a

$$(10) \quad K^2 - 2K - 1 < 0$$

1 pont

másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk.

A $K^2 - 2K - 1 = 0$ egyenlet gyökei

$$K_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ és } K_2 = 1 - \sqrt{2},$$

így a (10) egyenlőtlenség megoldásai a

$$1 - \sqrt{2} < K < 1 + \sqrt{2}$$

egyenlőtlenségeknek megfelelő valós számok.

1 pont

De tudjuk, hogy az ABC háromszög kerülete $K > 1$. Ezért a β szög akkor lehet a háromszög legkisebb szöge, ha

$$(11) \quad 1 < K < 1 + \sqrt{2}.$$

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzés:

Ne vonjunk le pontot, ha a versenyző $\beta \leq \gamma$ -val számol, azaz

$\beta = \gamma = 45^\circ$ -ot is megoldásnak veszi.