Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2009/2010
Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

2. forduló feladatainak megoldása

1. Oldja meg a valós számok legbővebb részhalmazán a

$$\left(\frac{2009}{2010}\right)^{\log_{2010}\log_{\frac{1}{2009}}\left(x-\frac{2010}{2009}\right)}<1$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A második logaritmus értelmezése miatt: $x>\frac{2010}{2009}$. 1 pont

Felhasználjuk, hogy mind az exponenciális, mind a logaritmusfüggvények szigorúan monoton nőnek, ha az „a” alapszámukra fennáll, hogy a >1, és szigorúan monoton csökkennek, ha az „a” alapszámra teljesül, hogy 0<a<1.

Mivel $0<\frac{2009}{2010}<1$, ezért a $\frac{2009}{2010}$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken. Ezért az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\log_{2010}\log_{\frac{1}{2009}}(x-\frac{2010}{2009})>0$$

egyenlőtlenséggel. 2 pont

A 2010-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, mert alapja 1-nél nagyobb, ezért a megoldandó egyenlőtlenség egyenértékű a

$$\log_{\frac{1}{2009}}(x-\frac{2010}{2009})>1$$

egyenlőtlenséggel.
Ez azt is jelenti, hogy az első logaritmus is értelmezett, hiszen argumentuma nagyobb 1-nél, azaz pozitív. 2 pont

A $0<\frac{1}{2009}<1$ miatt az $\frac{1}{2009}$ alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökken, ezért

$$x-\frac{2010}{2009}<\frac{1}{2009},$$

innen pedig

$$x < \frac{2011}{2009}.$$ 2 pont

Az értelmezési tartomány figyelembe vételével az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{2010}{2009} < x < \frac{2011}{2009}.$$ 2 pont

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a $\left]\frac{2010}{2009}; \frac{2011}{2009}\right[$ intervallum minden valós értéke kielégíti az egyenlőtlenséget. 1 pont

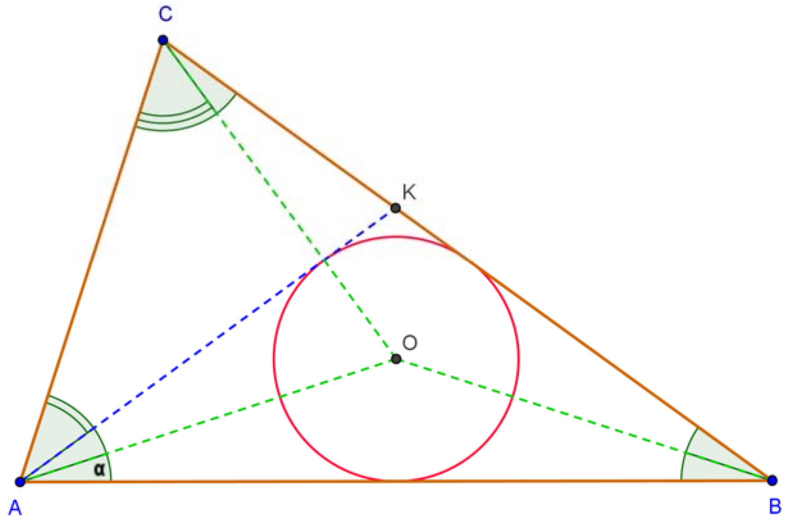
Összesen: 10 pont

2. Az ABC háromszög A csúcsból induló belső szögfelezője a K pontban metszi a BC oldalt. Az ABK háromszög belülírt körének és az ABC háromszög körülírt körének a középpontja egybeesik.

Mekkorák az ABC háromszög szögei?

Megoldás:

jelöléseink az 1. ábrán láthatók



1. ábra 1 pont

Az ABK háromszög belülírt körének O középpontja az ABK háromszög belső pontja, de akkor az O pont belső pontja az ABC háromszögnek is. A feltételek szerint O az ABC háromszög körülírt körének középpontjával azonos, ha pedig ez a pont az ABC háromszög belső pontja, akkor az ABC háromszög csak hegyesszögű lehet. 1 pont

Az O pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja, ezért

(1) $$OA = OB = OC = R.$$

Legyen $OAB\angle = \alpha$!

Az OAB háromszög egyenlő szárú (1) miatt, ezért

$$OBA\angle = OAB\angle = \alpha.$$ 1 pont

Mivel az O az ABK háromszög beírt körének középpontja, ezért az OA és OB szakaszok az ABK háromszögben belső szögfelezők, vagyis

$$OAK\angle = OAB\angle = \alpha,$$

valamint

$$OBK\angle = OBA\angle = \alpha .$$ 1 pont

Az OCB háromszög is egyenlő szárú (1) miatt, ezért

$$OBC\angle = OCB\angle ,$$

de

$$OBC\angle = OBK\angle = \alpha ,$$

így

$$OBC\angle = \alpha \text{ és } OCB\angle = \alpha .$$ 1 pont

A feladat feltétele szerint az ABC háromszögben AK belső szögfelező, ebből az következik, hogy

$$BAK\angle = CAK\angle ,$$

de mivel

$$BAK\angle = OAB\angle + OAK\angle = \alpha + \alpha ,$$

ezért

$$BAK\angle = CAK\angle = 2\alpha .$$ 1 pont

Az OAC háromszögben

$$OAC\angle = OAK\angle + CAK\angle = \alpha + 2\alpha = 3\alpha ,$$

ugyanakkor az OAC háromszög egyenlő szárú (1) miatt, ezért

$$OAC\angle = OCA\angle = 3\alpha .$$ 1 pont

Mindezekből az következik, hogy az ABC háromszög belső szögeinek összege:

$$CAB\angle + ABC\angle + BCA\angle = (2\alpha + \alpha + \alpha) + (\alpha + \alpha) + (\alpha + 3\alpha) = 10\alpha .$$ 1 pont

Mivel

$$10\alpha = 180° ,$$

ezért

$$\alpha = 18° ,$$ 1 pont

és így az ABC háromszög belső szögei

$$CAB\angle = 72° ,\ ABC\angle = 36° ,\ BCA\angle = 72° .$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Mutassa meg, hogy ha az n, m természetes számokra

$$f(n+m)=f(n)+f(m)+1 \text{ és } f(1)=2$$

teljesül, akkor az

$$f(1);\ f(2);\ f(3);\ldots;f(n)$$

számok számtani sorozatot alkotnak!

Számítsa ki a számtani sorozat első 2010 tagjának összegét!

<u>Megoldás:</u>

A feltételek szerint

(1) $$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)+1=5$$
és
(2) $$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)+1=8\,.$$

(1)-ből és (2)-ből kaphatjuk, hogy

$$f(2)-f(1)=3\text{, és } f(3)-f(2)=3\,.$$

Ebből sejthetjük, hogy $f(1);\ f(2);\ f(3);\ldots;f(n)$ egy 3 differenciájú számtani sorozatot alkot. 1* pont

Legyen n 1-nél nagyobb egész szám, ekkor $n-1$ pozitív egész. 1 pont

Az $f(2);\ f(3);\ldots;f(n)$ számok sorozatának n-edik tagja:

$$f(n)=f[(n-1)+1].$$ 1** pont

Az $f(n+m)=f(n)+f(m)+1$ feltétel szerint

(3) $$f(n)=f(n-1)+f(1)+1,$$ 1 pont
és mivel $f(1)=2$, ezért a (3) összefüggésből:

(4) $$f(n)-f(n-1)=3\,.$$ 1 pont

(4) szerint az $f(1);\ f(2);\ f(3);\ldots;f(n)$ számsorozatban a második tagtól

kezdve bármelyik tagból a sorozat megelőző tagját kivonva mindig 3-at kapunk. Ez éppen azt jelenti, hogy az $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$;…; $f(n)$ számok egy számtani sorozat egymás utáni tagjai, a számtani sorozat differenciája pedig $d=3$. 2* pont

A $d=3$ különbségű számtani sorozat első tagja

$$f(1)=2,$$

ezért a számtani sorozatok első n tagjának összegére vonatkozó

$$S_n=\frac{2\cdot a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$$

képlet alapján

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2010)=\frac{2\cdot 2+2009\cdot 3}{2}\cdot 2010,$$

azaz

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2010)=6061155.$$ 3* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

1. ha a versenyző csak konkrét esetekben vizsgálja a feladatot (jól), akkor csak a * pontokat kaphatja meg.
2. ha konkrét esetet nem vizsgál (egyébként jó), akkor az első 1* pontot nem kapja meg, hanem 1** pontja helyett 2 pontot kap.

4. Oldja meg az

$$|x-4y+1|+|y-3x-2|+|x+y+2|+|x+2y+3|=4$$

egyenletet, ha $x \in Z$ és $y \in Z$!

Megoldás:

Tudjuk, hogy tetszőleges „a” valós számra

$$|a| \geq a,$$

továbbá egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a \geq 0$. 1 pont

Ezért az egyenletünk bal oldala nem lehet kisebb, mint az egyes abszolutérték jelek közti kifejezések összege, ami

$$B=(x-4y+1)+(y-3x-2)+(x+y+2)+(x+2y+3),$$

(1) $B=4$. 1 pont

Mivel a jobb oldal is 4, ezért csak akkor egyenlőek az oldalak, ha mindegyik abszolutérték jelben nem negatív szám áll, azaz

(2/a) $x-4y+1 \geq 0$, és

(2/b) $y-3x-2 \geq 0$, és

(2/c) $x+y+2 \geq 0$, és

(2/d) $x+2y+3 \geq 0$. 1 pont

A(2/a) és (2/b) egyenlőtlenségekből a következőhöz jutunk:

$$3x+2 \leq y \leq \frac{x+1}{4}.$$

Ebből pedig

$$11x \leq -7,$$

illetve

$$x \leq -\frac{7}{11}$$

következik, amelyből, figyelembe véve, hogy $x \in Z$, azt kapjuk, hogy

(3) $x \leq -1$. 1 pont

Ehhez hasonlóan a (2/a) és a (2/c) egyenlőtlenségekből:

$$-x-2 \leq y \leq \frac{x+1}{4},$$

ahonnan

$$5x \geq -9,$$

$$x \geq -\frac{9}{5}.$$

Itt is figyelembe vesszük, hogy $x \in Z$, és így a következő eredményre jutunk:

(4) $$x \geq -1.$$ 1 pont

(3) és (4) összevetéséből adódik, hogy

$$x = -1,$$ 1 pont

amit behelyettesítve a

$$-x - 2 \leq y \leq \frac{x+1}{4} \text{ vagy a } 3x + 2 \leq y \leq \frac{x+1}{4}$$

egyenlőtlenségekbe

$$y = -1, \text{ és } y = 0$$

következik (mivel $y \in Z$). 1 pont

Ez eleget tesz a 2/d-nek is, ugyanis

$$-1 + (-2) + 3 = 0,$$

$$-1 + 0 + 3 > 0.$$ 1 pont

Az egyenletnek tehát két megoldása van, mégpedig az

$$x = -1;\ y = 0,$$

és az

$$x = -1;\ y = -1$$

számpár. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kapott számpárok az eredeti egyenletnek is megoldásai. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Egy 12 oldalú konvex sokszög belsejében 1000 pontot helyeztünk el úgy, hogy az 1012 pont közül (beleértve a sokszög csúcsait is) semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre.
Maximálisan hány olyan háromszöget készíthetünk, amelynek mindhárom csúcsa az 1012 pont közül kerül ki?

1. Megoldás:

A feladatban szereplő 1012 pont közül semelyik három nem esik egy egyenesre, ezért közülük bármelyik három pontot kiválasztva háromszöget kapunk. 3 pont

Ha figyelembe vesszük a pontok kiválasztásának sorrendjét, akkor az első kiválasztott pont az 1012 pont bármelyike lehet, a másodikat már csak 1011 pontból választhatjuk, végül a harmadik pont a maradék 1010 pont közül bármelyik lehet. Három pont ilyen módon való kiválasztása ezért

(1) $$1012 \cdot 1011 \cdot 1010 = 1033363320$$

módon történhet. 2 pont

Nyilvánvaló azonban, hogy ugyanazon három pont bármely sorrendben történő kiválasztása ugyanazt a háromszöget adja. 2 pont

Ugyanazon három pont hatféle sorrendben választható ki, ezért a háromszögek számának megállapításához az (1) alatti számot osztanunk kell 6-tal. 1 pont

$$\frac{1033363320}{6} = 172227220$$ 1 pont

A feltételeknek megfelelő 1012 pont közül tehát maximálisan 172227220 darab háromszöget készíthetünk. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

A feladatban szereplő 1012 pont közül semelyik három nem esik egy egyenesre, ezért közülük bármelyik három pontot kiválasztva háromszöget kapunk. 3 pont

A kérdéses háromszögek száma megegyezik egy 1012 különböző elemből álló halmaz összes harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával, ezért a feladatban szereplő háromszögek maximális száma:

(1) $$\binom{1012}{3}=\frac{1012!}{3!\cdot 1009!}.$$ 2 pont

Mivel $1012!=1009!\cdot 1010\cdot 1011\cdot 1012$, és $3!=1\cdot 2\cdot 3$, ezért (1)-ből az következik, hogy

(2) $$\binom{1012}{3}=\frac{1010\cdot 1011\cdot 1012}{1\cdot 2\cdot 3}.$$ 2 pont

A (2) alatt szereplő törtet egyszerűsítve és a szorzási műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

(3) $$\binom{1012}{3}=172227220.$$ 2 pont

A feltételeknek megfelelő 1012 pont közül tehát maximálisan 172227220 darab háromszöget készíthetünk. 1 pont

Összesen: 10 pont