



## A döntő feladatai

### 1. Feladat

Egy kifejezést a következő képlettel definiálunk:

$$K = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 2017}{x^2 - 9},$$

ahol  $x \in [-2008; 2008]$  és  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Mennyi a valószínűsége annak, hogy  $K$  egész szám, ha  $x$  eleget tesz a fenti feltételeknek?**

### 2. Feladat

Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB$  átfogójára és az  $AC$  befogójára kifelé megrajzoltuk az  $ABDE$  és  $ACFG$  négyzeteket.

**Jelölje  $M$  az  $EC$  és  $BG$  szakaszok metszéspontját!**

**Mekkora szögben látszanak az  $M$  pontból az  $ABC$  háromszög oldalai?**

### 3. Feladat

Egy  $m$  sorból és  $n$  oszlopból álló, téglalap alakú táblázat minden mezőjébe egy-egy számot írunk oly módon, hogy az egyes sorokba írt számok egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjait képezik, hasonlóképpen az egyes oszlopokba írt számok is egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.

**Mennyi a táblázatba írt számok összege, ha a téglalap négy sarkába (csúcsába) írt számok összege 2008?**

**Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.**



## A döntő feladatainak megoldása

### 1. Feladat

Egy kifejezést a következő képlettel definiálunk:

$$K = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 2017}{x^2 - 9},$$

ahol  $x \in [-2008; 2008]$  és  $x \in \mathbb{Z}$ .

Mennyi a valószínűsége annak, hogy  $K$  egész szám, ha  $x$  eleget tesz a fenti feltételeknek?

### Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy a  $K$  kifejezés nem értelmezhető, ha  $x^2 - 9 = 0$ , ezért

$$x \neq \pm 3. \quad (1 \text{ pont})$$

Alakítsuk át a  $K$  kifejezést:

$$K = \frac{x \cdot (x^2 - 9) - (x^2 - 9) + 2008}{x^2 - 9},$$
$$K = x - 1 + \frac{2008}{x^2 - 9}. \quad (2 \text{ pont})$$

$K$  akkor és csak akkor lesz egész szám, ha  $\frac{2008}{x^2 - 9}$  egész, ami

ekvivalens azzal, hogy az  $x^2 - 9$  kifejezés értékei a 2008 szám

– pozitív és negatív – osztói. (1 pont)

Mivel 2008 prímtényezős felbontása:  $2^3 \cdot 251$ , (1 pont)

ezért  $x^2 - 9$ -nek csak a következő táblázat első oszlopában

lévő értékei adhatnak  $K$ -ra egész értéket.

A táblázat tartalmazza az ezekből számított  $x^2$ , illetve  $x$  számokat.



$x^2 - 9$	$x^2$	$x$
1	10	nem egész szám
-1	8	nem egész szám
2	11	nem egész szám
-2	7	nem egész szám
4	13	nem egész szám
-4	5	nem egész szám
8	17	nem egész szám
-8	1	$x = 1$ és $x = -1$
251	260	nem egész szám
-251	-242	nem valós szám
502	511	nem egész szám
-502	-493	nem valós szám
1004	1013	nem egész szám
-1004	-995	nem valós szám
2008	2017	nem egész szám
-2008	-1999	nem valós szám

(2 pont)

A fenti táblázatból látható, hogy csak  $x^2 - 9 = -8$  esetben kapunk  $x$ -re egész számot. Ez azt jelenti, hogy a feladat szempontjából csak

$$x = +1$$

és

$$x = -1$$

felel meg, tehát a kedvező esetek száma:

$$k = 2.$$

(1 pont)

Az összes esetek számát megkapjuk, ha a  $[-2008; 2008]$  intervallumbeli egészek számából levonjuk az  $x \neq +3$  és  $x \neq -3$  feltétel miatt kieső két számot. Így az összes esetek száma:

$$n = 4015.$$

(1 pont)

A keresett valószínűség tehát:

$$P = \frac{k}{n},$$

$$P = \frac{2}{4015}.$$

(1 pont)

Összesen: 10 pont

## 2. Feladat

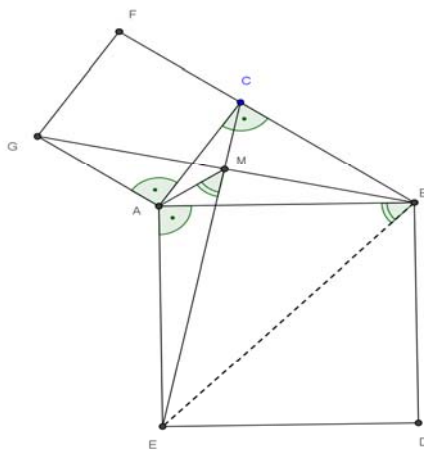
Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB$  átfogójára és az  $AC$  befogójára kifelé megrajzoltuk az  $ABDE$  és  $ACFG$  négyzeteket.

Jelölje  $M$  az  $EC$  és  $BG$  szakaszok metszéspontját!

Mekkora szögben látszanak az  $M$  pontból az  $ABC$  háromszög oldalai?

### Megoldás I. :

Jelöléseink az alábbi ábrán láthatók.



1. ábra

Az  $AGB$  háromszög negatív irányú  $90^\circ$ -os elforgatottja az  $ACE$  háromszög. (2 pont)

Ezért a  $GB$  és  $CE$  szakaszok merőlegesek egymásra, tehát az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldala az  $M$  pontból derékszögben látszik. (2 pont)

Mivel  $GB$  és  $CE$  szakaszok merőlegesek egymásra, ezért az  $M$  pont rajta van a  $BE$  szakasz, mint átmérő fölé rajzolt Thalész-körön is. (1 pont)

Ebben a körben az  $ABE\angle$  olyan kerületi szög, amely az  $AE$  ívhez tartozik.



Másrészt

$$ABE\angle = 45^{\circ},$$

mivel az  $ABDE$  négyzet oldalának és átlójának szöge. (1 pont)

De ugyanehhez az ívhez tartozik az  $AME\angle$  is, ezért a kerületi szögek tétele alapján

$$AME\angle = ABE\angle. \quad (2 \text{ pont})$$

Így az  $AB$  átfogó  $M$  pontból mért látószöge:

$$AMB\angle = 90^{\circ} + 45^{\circ},$$

$$AMB\angle = 135^{\circ}. \quad (1 \text{ pont})$$

A harmadik oldal látószöge:

$$AMC\angle = 360^{\circ} - (135^{\circ} + 90^{\circ}),$$

$$AMC\angle = 135^{\circ}. \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés:*

A második látószöget a kerületi szögtétel nélkül például az alábbiak szerint kaphatjuk meg.

Megszerkesztjük az  $M$  pont ( $GB$ -n lévő)  $+90^{\circ}$ -os elforgatottját  $M'$ -t.

Az  $AMM'$  egyenlőszárú derékszögű háromszögből leolvashatjuk, hogy

$$AMM'\angle = AMG\angle = 45^{\circ},$$

amiből

$$AMC\angle = AMG\angle + GMC\angle,$$

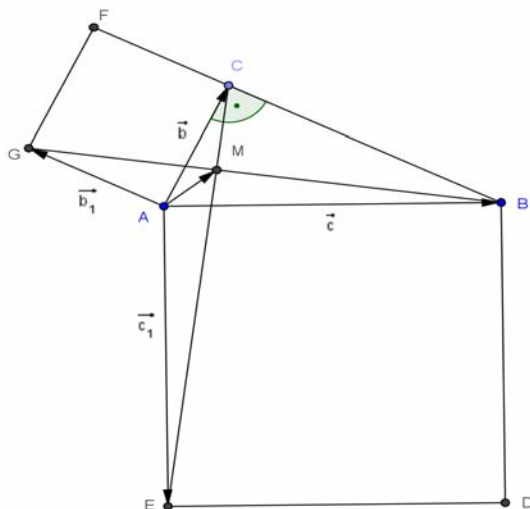
$$AMC\angle = 45^{\circ} + 90^{\circ},$$

$$AMC\angle = 135^{\circ}. \quad (5 \text{ pont})$$

Ekkor  $AMB\angle$ -t számoljuk kivonással. (1 pont)

## Megoldás II. :

Ebben a megoldásban a  $GB$  és  $CE$  szakaszok merőlegességét vektorok segítségével bizonyítjuk.



2. ábra

A feladat feltételei miatt a 2. ábrán megjelölt  $\vec{b}$  és  $\vec{b}_1$ , illetve  $\vec{c}$  és  $\vec{c}_1$  vektorokra nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$(1) \quad |\vec{b}| = |\vec{b}_1| = AC = b, \text{ illetve } |\vec{c}| = |\vec{c}_1| = AB = c.$$

Mivel a  $\vec{b}$  és a  $\vec{b}_1$ , illetve a  $\vec{c}$  és a  $\vec{c}_1$  vektorok által bezárt szög  $90^\circ$ -os, ezért a két-két vektor skaláris szorzata nulla, azaz

$$(2) \quad \vec{b} \cdot \vec{b}_1 = 0, \text{ és } \vec{c} \cdot \vec{c}_1 = 0. \quad (1 \text{ pont})$$

Az ábra alapján

$$\vec{GB} = \vec{c} - \vec{b}_1, \text{ és } \vec{CE} = \vec{c}_1 - \vec{b}.$$

Írjuk fel a  $\vec{GB}$  és  $\vec{CE}$  vektorok skaláris szorzatát:

$$(3) \quad \vec{GB} \cdot \vec{CE} = (\vec{c} - \vec{b}_1) \cdot (\vec{c}_1 - \vec{b}).$$

Tudjuk, hogy a skaláris szorzás disztributív, ezért (3) átalakítva:

$$(4) \quad \vec{GB} \cdot \vec{CE} = \vec{c} \cdot \vec{c}_1 - \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 + \vec{b}_1 \cdot \vec{b}.$$

(2)-t (4)-be helyettesítve:

$$(5) \quad \vec{GB} \cdot \vec{CE} = -\vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 \quad (1 \text{ pont})$$



következik.

Mivel a  $\vec{c}$  és  $\vec{b}$  vektorok által bezárt szög a szokásos jelölések mellett

$$\angle BAC = \alpha,$$

a  $\vec{b}_1$  és  $\vec{c}_1$  vektorok bezárt szöge viszont

$$\angle GAE = 180^\circ - \alpha,$$

ezért (5)-ből és (1)-ből

$$\vec{GB} \cdot \vec{CE} = -b \cdot c \cdot \cos \alpha - b \cdot c \cdot \cos(180^\circ - \alpha). \quad (1 \text{ pont})$$

Felhasználva, hogy

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

kapjuk, hogy

$$(6) \quad \vec{GB} \cdot \vec{CE} = 0.$$

A (6) összefüggés akkor és csakis akkor teljesül, ha a  $\vec{GB}$  és  $\vec{CE}$  vektorok merőlegesek egymásra. Ez pontosan azt jelenti, hogy a  $GB$  és  $CE$  szakaszok merőlegesek egymásra, ezért az  $ABC$  háromszög  $BC$  befogója az  $M$  pontból derékszögben látható. (1 pont)

Innen a feladat az első megoldás menete alapján fejezhető be. (6 pont)

Összesen: 10 pont

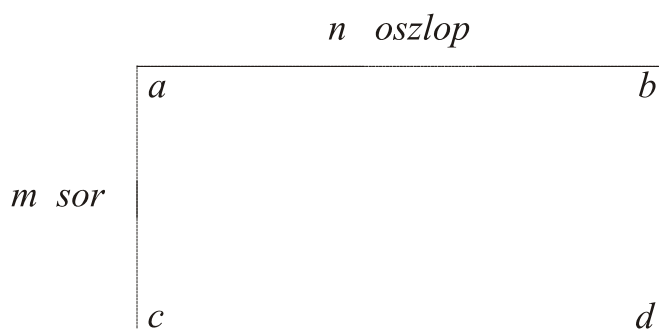


### 3. Feladat

Egy  $m$  sorból és  $n$  oszlopból álló, téglalap alakú táblázat minden mezőjébe egy-egy számot írunk oly módon, hogy az egyes sorokba írt számok egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjait képezik, hasonlóképpen az egyes oszlopokba írt számok is egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.

Mennyi a táblázatba írt számok összege, ha a téglalap négy sarkába (csúcsába) írt számok összege 2008 ?

### Megoldás:



3. ábra

Legyen a sarkokba írt négy szám a 3. ábra szerint  $a; b; c; d$  !

Először soronként összegezzük a számokat.

A feltétel szerint az első sorban levő számok egy számtani sorozat tagjai. Ennek a számtani sorozatnak a különbségét jelöljük  $d_1$ -gyel!

Az első sorban levő számok a következők:

$$a; a + d_1; a + 2d_1; a + 3d_1; \dots; a + (n-1) \cdot d_1 = b,$$

összegük:

$$(1) \quad S_1 = a + (a + d_1) + (a + 2d_1) + \dots + a + (n-1)d_1.$$

$$(2) \quad S_1 = \frac{a+b}{2}n. \quad (1 \text{ pont})$$

Az egyes oszlopokban szereplő számok is egy-egy számtani sorozat





tagjai. Az ezekhez a sorozatokhoz tartozó különbségek legyenek rendre

$$d_2; d_3; d_4; \dots; d_{n+1}!$$

Ezekkel a jelölésekkel kifejezhetők (balról jobbra haladva) a második sorban levő számok:

$$a + d_2; a + d_1 + d_3; a + 2d_1 + d_4; a + 3d_1 + d_5; \dots; a + (n-1) \cdot d_1 + d_{n+1},$$

amelyek összege:

$$(3) \quad S_2 = (a + d_2) + (a + d_1 + d_3) + \dots + [a + (n-1)d_1 + d_{n+1}].$$

Ha (3)-ból kivonjuk (1)-et, akkor azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad S_2 - S_1 = d_2 + d_3 + \dots + d_{n+1}. \quad (2 \text{ pont})$$

Jelöljük ezt  $S_d$ -vel!

A harmadik sorban levő számok ugyancsak kifejezhetők a fenti jelölésekkel:

$$a + 2d_2; a + d_1 + 2d_3; a + 2d_1 + 2d_4; a + 3d_1 + 2d_5; \dots; a + (n-1) \cdot d_1 + 2d_{n+1},$$

ezek összege:

$$(5) \quad S_3 = (a + 2d_2) + (a + d_1 + 2d_3) + \dots + [a + (n-1)d_1 + 2d_{n+1}].$$

(5) és (3) különbségeként adódik:

$$S_3 - S_2 = d_2 + d_3 + \dots + d_{n+1},$$

ami (4) miatt

$$(6) \quad S_3 - S_2 = S_d.$$

Bizonyítható, hogy bármelyik sor tagjainak összegéből kivonva a megelőző sor tagjainak összegét, mindig ugyanazt az

$$S_d = d_2 + d_3 + \dots + d_{n+1}$$

összeget kapjuk,

(3\* pont)

azaz átrendezve (4), (6)...:



$$S_2 = S_1 + S_d,$$

$$S_3 = S_2 + S_d,$$

.....

$$S_m = S_{m-1} + S_d$$

Ezzel beláttuk, hogy az  $m$  sorban elhelyezkedő  $m$  darab összeg szintén számtani sorozatot alkot. (1 pont)

Ennek első tagja (2) szerint

$$S_1 = \frac{a+b}{2}n,$$

$m$  -edik tagja pedig

$$S_m = \frac{(c+d)n}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel a soronkénti összegeket – amik egy számtani sorozat tagjai – kell összegeznünk, ezért

$$S = \frac{S_1 + S_m}{2}m,$$

$$S = \frac{\left(\frac{a+b}{2} \cdot n + \frac{c+d}{2} \cdot n\right) \cdot m}{2},$$

$$S = \frac{m \cdot n \cdot (a+b+c+d)}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$

A feladat feltétele alapján

$$a+b+c+d = 2008,$$

ezért

$$S = \frac{m \cdot n \cdot 2008}{4},$$

$$S = 502 \cdot m \cdot n. \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 10 pont



*Megjegyzés (1):*

Természetesen úgy is eljuthatunk a megoldáshoz, hogy a sorok összegzése után oszloponként adjuk össze a számokat, és a két összeg együttesen a táblázatba írt számok összegének a kétszeresét adja.

*Megjegyzés (2):*

A leírt megoldásban nem használtuk ki, hogy  $d_2, d_3, \dots, d_{n+1}$  számtani sorozatot kell alkotson, ha a feladat szövege szerint minden sorban számtani sorozat van. A versenyző erre is építheti megoldását.

*Megjegyzés (3):*

Ha a versenyző nem bizonyítja korrektül az

$$S_i - S_{i-1} = S_d$$

összefüggést, akkor a 3\* pontból vonjunk le 1 pontot.