



A döntő feladatai

1. Legyenek az $x^2 - (a+d) \cdot x + ad - bc = 0$ egyenlet gyökei az x_1 és x_2 valós számok!
Bizonyítsa be, hogy ekkor az $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$ egyenlet gyökei az $y_1 = x_1^3$ és $y_2 = x_2^3$!
2. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai AB és CD .
A $DC; CB$ és BD szakaszok hosszai ebben a sorrendben egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai. Az $AD; AB$ és AC szakaszok hosszai ebben a sorrendben szintén egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai.
Határozza meg a trapéz oldalai hosszának arányát!
3. Anna dobókockájának 4 lapja fehér, 2 lapja fekete, Bori dobókockájának minden lapja fehér.
 - a) Bori be akarja festeni a kockája néhány lapját feketére úgy, hogy ha a festés után egyszerre dobnak a kockáikkal, akkor az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{7}{18}$ legyen.
Hány lapot fessen be Bori?
 - b) Mutassa meg, hogy Bori nem tudja úgy festeni a kockáját, hogy az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$ legyen!
 - c) A Bori által feketére festett lapok számához rendeljük hozzá az azonos szín dobásának valószínűségét!
Adja meg ennek a függvénynek az értékkészletét!



A döntő feladatainak megoldásai

1. Legyenek az $x^2 - (a + d) \cdot x + ad - bc = 0$ egyenlet gyökei az x_1 és x_2 valós számok!
Bizonyítsa be, hogy ekkor az $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$
egyenlet gyökei az $y_1 = x_1^3$ és $y_2 = x_2^3$!

Megoldás:

Írjuk fel az $x^2 - (a + d) \cdot x + ad - bc = 0$ másodfokú egyenlet gyökei és
együtthatói közötti összefüggéseket:

$$(1) \quad x_1 + x_2 = a + d,$$

illetve

$$(2) \quad x_1 x_2 = ad - bc. \quad (1 \text{ pont})$$

Az $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$ egyenlet elsőfokú tag
együtthatójának ellentettjét alakítva kapjuk:

$$a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd = a^3 + d^3 + 3(a + d)bc,$$

$$(3) \quad a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd = (a + d)^3 - 3(a + d)(ad - bc).$$

Az (1) és (2) összefüggéseket (3)-ba helyettesítve:

$$a^3 + b^3 + 3abc + 3bcd = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1 x_2,$$

a műveletek elvégzése és rendezés után:

$$(4) \quad a^3 + b^3 + 3abc + 3bcd = x_1^3 + x_2^3. \quad (4 \text{ pont})$$

Másrészt az $y^2 - (a^3 + b^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$ nulladfokú
tagjába (2)-t helyettesítve :

$$(ad - bc)^3 = (x_1 \cdot x_2)^3$$

$$(5) \quad (ad - bc)^3 = x_1^3 x_2^3 \quad (1 \text{ pont})$$



(4) és (5) felhasználásával az $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$ egyenlet felírható a következő képpen is:

$$(6) \quad y^2 - (x_1^3 + x_2^3)y + x_1^3 x_2^3 = 0.$$

(6) bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(7) \quad (y - x_1^3)(y - x_2^3) = 0.$$

A (7) egyenlet gyökei pedig valóban az x_1^3 és x_2^3 valós számok. (3 pont)

Az $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$ egyenletnek akkor vannak valós gyökei, ha $D = (a^3 + b^3 + 3abc + 3bcd)^2 - 4 \cdot (ad - bc)^3 \geq 0$.

Ez a feltétel (4) és (5) segítségével $(x_1^3 + x_2^3)^2 - 4 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \geq 0$,

azaz $(x_1^3 - x_2^3)^2 \geq 0$ alakú lesz. Ez utóbbi minden x_1 és x_2 valós számra teljesül, ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ha az $x^2 - (a + d) \cdot x + ad - bc = 0$ egyenletnek vannak valós gyökei, akkor az

$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd) \cdot y + (ad - bc)^3 = 0$ egyenlet valós gyökei is léteznek (1 pont)

összesen: 10 pont

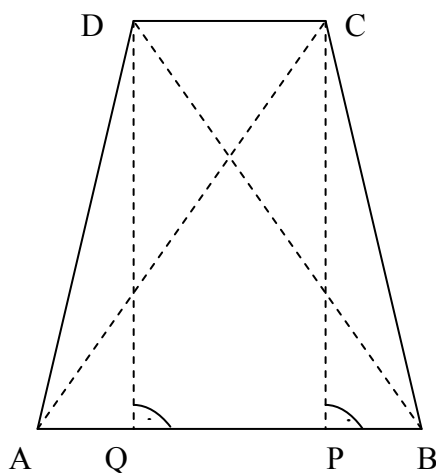


2. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai AB és CD . A DC ; CB és BD szakaszok hosszai ebben a sorrendben egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai. Az AD ; AB és AC szakaszok hosszai ebben a sorrendben szintén egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai.
Határozza meg a trapéz oldalai hosszának arányát!

Megoldás:

Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát!

Az ábrán merőlegest bocsátottunk a C illetve D pontokból az AB szakaszra, a merőlegesek talppontjai P illetve Q .



Legyen $AB = a$, $BC = b$ és $CD = c$, továbbá $AC = e$!

A tengelyes szimmetria miatt nyilvánvaló, hogy

$$DA = b \text{ és } BD = e.$$

Az AQ illetve BQ befogók hossza:

$$(1) \quad AQ = \frac{a-c}{2},$$

illetve

$$(2) \quad BQ = \frac{a+c}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$



A feltételek miatt a feladatban két növekvő számtani sorozat 3-3 egymást követő tagja szerepel, fenti jelöléseinkkel ezek a következők:

$$(3) \quad c; b; e,$$

és

$$(4) \quad b; a; e.$$

Legyen a (3) sorozat differenciája d !

Mivel a sorozat növekvő, ezért nyilvánvaló, hogy $d > 0$.

A számtani sorozat tulajdonsága miatt:

$$(5) \quad c = b - d \quad \text{és} \quad e = b + d. \quad (1 \text{ pont})$$

A (4) számtani sorozatra teljesül, hogy

$$a = \frac{e + b}{2},$$

azaz (5)-öt behelyettesítve:

$$(6) \quad a = \frac{2b + d}{2} = b + \frac{d}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az ADQ és BDQ háromszögek derékszögűek, ezért (1) és (2) felhasználásával a Pitagorasz-tétel alapján felírjuk, hogy:

$$(7) \quad b^2 - \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = e^2 - \left(\frac{a + c}{2}\right)^2. \quad (1 \text{ pont})$$

az (5) és (6) kifejezéseiből következik, hogy egyrészt

$$\frac{a - c}{2} = \frac{3d}{4},$$

másrészt

$$\frac{a + c}{2} = \frac{4b - d}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$



Ezeket, illetve az ugyancsak (5)-ből kapott $e = b + d$ összefüggést beírjuk (7)-be:

$$b^2 - \left(\frac{3d}{4}\right)^2 = (b+d)^2 - \left(\frac{4b-d}{4}\right)^2. \quad (1 \text{ pont})$$

Elvégezve a műveleteket, rendezés és egyszerűsítés után a

$$(8) \quad 2b^2 - 5bd - 3d^2 = 0$$

egyenletre jutunk.

Tekintsük (8)-at b -ben másodfokú egyenletnek, a megoldóképlet segítségével kapjuk, hogy:

$$b_1 = 3d \quad \text{és} \quad b_2 = -\frac{1}{2}d.$$

Figyelembe véve a $d > 0$ feltételt a $b_2 = -\frac{1}{2}d$ nem megoldás. (2 pont)

Ezért

$$b = 3d.$$

Így (5) és (6) szerint:

$$a = \frac{7d}{2}; \quad b = \frac{6d}{2}; \quad c = \frac{4d}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ebből következően az $ABCD$ trapéz oldalai hosszának aránya:

$$AB : BC : CD : DA = 7 : 6 : 4 : 6. \quad (1 \text{ pont})$$

összesen: 10 pont



3. Anna dobókockájának 4 lapja fehér, 2 lapja fekete, Bori dobókockájának minden lapja fehér.
- a) Bori be akarja festeni a kockája néhány lapját feketére úgy, hogy ha a festés után egyszerre dobnak a kockáikkal, akkor az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{7}{18}$ legyen.
Hány lapot fessen be Bori?
- b) Mutassa meg, hogy Bori nem tudja úgy festeni a kockáját, hogy az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$ legyen!
- c) A Bori által feketére festett lapok számához rendeljük hozzá az azonos szín dobásának valószínűségét!
Adja meg ennek a függvénynek az értékkészletét!

Megoldás:

Tegyük fel, hogy Bori x számú lapot festett be.

Először vizsgáljuk azt az eseményt, hogy mindketten feketét dobnak!

Jelöljük A -val azt az eseményt, hogy Anna feketét dob, és

B -vel azt, hogy Bori dob feketét

Ezek valószínűségei a következők:

$$P(A) = \frac{2}{6}, \text{ illetve } P(B) = \frac{x}{6}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az A és B egymástól független események, ezért annak valószínűsége,

Hogy mindketten feketét dobnak,

$$P_{(AB)} = P_{(A)} \cdot P_{(B)},$$

azaz

$$(1) \quad P(A \cdot B) = \frac{2x}{36}. \quad (1 \text{ pont})$$



Másodszor vizsgáljuk azt, hogy mindketten fehéret dobnak.
Legyen C illetve D az az esemény, hogy Anna illetve Bori fehéret dob!
Ezek valószínűségei:

$$P(C) = \frac{4}{6} \text{ illetve } P(D) = \frac{6-x}{6}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel a dobások egymástól függetlenek, így annak valószínűsége, hogy mindketten fehéret dobnak:

$$(2) \quad P(C \cdot D) = \frac{4 \cdot (6-x)}{36}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az azonosan fekete, illetve azonosan fehér szín dobása egymást kizáró események, ezért az azonos szín dobásának valószínűsége az (1) és (2) valószínűségek összege:

$$P(A \cdot B + C \cdot D) = \frac{2x}{36} + \frac{4 \cdot (6-x)}{36},$$

rendezés és egyszerűsítés után:

$$(3) \quad P(A \cdot B + C \cdot D) = \frac{12-x}{18}. \quad (1 \text{ pont})$$

Bori kívánsága szerint ez $\frac{7}{18}$ kell, hogy legyen.

$$(4) \quad \frac{12-x}{18} = \frac{7}{18}.$$

A (4) egyenlet megoldása $x = 5$, ezért a feladat a) részének kérdésére az a válaszunk, hogy Borinak a saját kockája 5 lapját kell feketére befestenie ahhoz, hogy az azonos szín dobásának valószínűsége

$$\frac{7}{18} \text{ legyen.} \quad (1 \text{ pont})$$



A feladat b) kérdése szerint az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$ lenne. Ez a

$$(5) \quad \frac{12-x}{18} = \frac{1}{4}$$

egyenlet megoldásából kapott x mellett teljesülne.

(5) megoldása: $x = \frac{15}{2}$, ez nem egész, így nem lehet kocka lapjainak száma.

Ezért az azonos szín dobásának valószínűsége valóban nem lehet $\frac{1}{4}$. (2 pont)

A c) kérdésre adandó válaszhoz először határozzuk meg az $f(x)$ -szel Jelölt függvény értelmezési tartományát!

Mivel Bori a kockájának 0,1,2,3,4,5 vagy 6 lapját festheti be feketére, ezért:

$$D_f = \{0;1;2;3;4;5;6\}. \quad (1 \text{ pont})$$

(3) alapján a függvény értékkészletének elemei kiszámíthatók, így rendre azt kapjuk, hogy:

$$R_f = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{11}{18}; \frac{5}{9}; \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{7}{18}; \frac{1}{3} \right\}. \quad (1 \text{ pont})$$

összesen: 10 pont