Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2005–2006-os tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket az ottani 5. pont utolsó mondatára, mely szerint minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 15 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül a versenybizottságnak**: OKTV Matematika III., OKÉV, 1363 Budapest, Pf. 19. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenyszabályzatnak az Oktatási Minisztérium által tavaly történt szigorú módosítása miatt a Versenybizottság legfeljebb 30 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban a feladatoknak általában csak egy vagy két megoldását közöljük; más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2005. december — A versenybizottság

1. feladat

Igaz-e, hogy a $7k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 12321.)

Első megoldás: Olyan számokkal próbálkozunk, amelyek első és utolsó jegye c, közöttük pedig $t-1$ darab 0 van: $c(10^t+1)$. (1 pont)

Megvizsgáljuk 10 hatványainak a 7-tel való osztási maradékait. Ezek $10^t = (7+3)^t$ miatt ugyanazok, mint a 3 megfelelő hatványainak a maradékai. Mivel 3^3 maradéka -1, ezért 3^6 maradéka 1, és így 3^{6s} maradéka is 1. (2 pont)

Ennek alapján $10^{6s}+1$ maradéka 2, és így $c = 5$-re $5(10^{6s}+1)$ maradéka 3. Ezzel végtelen sok megfelelő palindrom számot kaptunk, az állítás igaz. (4 pont)

Második megoldás: Olyan számokkal próbálkozunk, amelyek minden jegye c: $c(1+10+\ldots+10^t)$. (1 pont)

Az $1+10+\ldots+10^t$ számok között végtelen sok 7-tel nem osztható van, hiszen bármely j-re az $1+10+\ldots+10^j$ és $1+10+\ldots+10^{j+1}$ számok közül legalább az egyik ilyen, ugyanis a különbségük, 10^{j+1}, nem osztható 7-tel. (2 pont)

Ha egy 7-tel nem osztható $1+10+\ldots+10^t$ számnak a 7-tel való osztási maradéka 1, akkor legyen $c = 3$, és hasonlóan, ha a maradék 2, 3, 4, 5, ill. 6, akkor legyen rendre $c = 5$, 1, 6, 2, ill. 4. Ezzel végtelen sok megfelelő palindrom számot kaptunk, az állítás igaz. (4 pont)

Harmadik megoldás: Legyen N tetszőleges pozitív egész szám. Írjunk N tízes számrendszerbeli alakjának végére egy később megválasztandó egyjegyű c számot, majd ezután N számjegyeit fordított sorrendben. Így egy K_c palindrom számot kapunk. Ha N jegyeinek száma n, akkor K_c jegyeinek száma $2n + 1$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges N esetén c megválasztható úgy, hogy a K_c palindrom szám $7k + 3$ alakú legyen. (1 pont)

Nyilván $K_c = K_0 + c10^n$. (2 pont)

Mivel 7 és 10^n relatív prímek, a $K_0, K_1, \ldots, K_6$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo 7. Így van közöttük olyan, amelynek a héttel való osztási maradéka 3. (4 pont)

2. feladat

Adott legalább kettő, de véges sok $1/2^k$ alakú szám, amelyek összege legfeljebb 1 (és minden k pozitív egész). Lássuk be, hogy a számok két csoportba sorolhatók úgy, hogy mindkét csoportban a számok összege legfeljebb $1/2$.

Első megoldás: A törtek darabszáma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha csak két szám van, akkor mindegyikük legfeljebb $1/2$, így megfelel, ha az egyik alkotja az egyik csoportot, a másik pedig a másik csoportot. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $r - 1$ törtre, és vegyünk tetszőleges r darab törtet, ahol $r \geq 3$.

Ha a törtek között van két egyforma, akkor helyettük tekintsük ezek összegét. Ezzel eggyel kevesebb $1/2^k$ alakú törthöz jutunk, amelyek összege változatlanul legfeljebb 1, tehát az indukciós feltétel szerint beoszthatók két megfelelő csoportba. Az összegtörtet „visszabontva” így az eredeti törteknek is egy jó beosztását kapjuk. (3 pont)

Ha mindegyik tört különböző, akkor a legnagyobb is legfeljebb $1/2$, a többiek összege pedig legfeljebb $(1/4) + (1/8) + \ldots + (1/2^j)$ valamilyen j-re, ami $(1/2) - (1/2^j) < (1/2)$. Így megfelel, ha a legnagyobb törtet rakjuk az egyik csoportba, az összes többit pedig a másikba. (3 pont)

Második megoldás: Ha a számok összege legfeljebb $1/2$, akkor akármilyen szétosztás megfelel. Egyébként töltsük fel az első csoportot a „mohó algoritmussal”: rakjuk bele a legnagyobb törtet, majd a legnagyobb olyat, hogy az összeg még legfeljebb $1/2$ legyen stb. Megmutatjuk, hogy a kimaradó számok összege is legfeljebb $1/2$, és így megfelel, ha őket rakjuk a második csoportba. (2 pont)

Ha az első csoport elemeinek összege, S, pontosan $1/2$, akkor a kimaradók összege $T \leq 1 - (1/2) = 1/2$.

Tegyük fel tehát, hogy $S < 1/2$. Ekkor valamilyen j-re

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^j} < S \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{j+1}}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy minden egyes kimaradó $1/2^k$ törtben $k \leq j$, különben bevehettük volna még az első csoportba. Így a kimaradó törtek T összegét közös 2^m nevezőre hozva $m \leq j$. Ha $T > 1/2$ lenne, akkor így $T \geq (1/2) + (1/2^m) \geq (1/2) + (1/2^j)$ adódna, de ekkor $S + T > 1$, ami ellentmondás. (5 pont)

3. feladat

A $[0,1]$ intervallumot 999 piros ponttal 1000 egyenlő részre, 1110 kék ponttal pedig 1111 egyenlő részre osztjuk fel. Mennyi a legkisebb távolság egy piros és egy kék pont között, és ez hány pontpárnál fordul elő?

Megoldás: A piros pontoknak a $k/1000$ számok, $1 \le k \le 999$, a kék pontoknak pedig a $t/1111$ számok, $1 \le t \le 1110$, felelnek meg. Egy-egy ilyen pont távolsága

$$\left|\frac{k}{1000} - \frac{t}{1111}\right| = \left|\frac{1111k - 1000t}{1111 \cdot 1000}\right|. \qquad \text{(2 pont)}$$

Itt a számláló nem 0, hiszen $1111k = 1000t$ esetén $1111 \mid 1000t$, ahonnan $(1111, 1000) = 1$ miatt $1111 \mid t$, ami $1 \le t \le 1110$ esetén nem teljesül. Így a számláló abszolút értéke legalább 1, azaz a távolság legalább $1/1111000$. (2 pont)

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $1111k - 1000t = 1$ vagy -1. Mindkét lineáris diofantikus egyenlet megoldható, mert $(1111, 1000) = 1$. (Közvetlenül is látszik, hogy $k = -9$, $t = -10$, illetve $k = 9$, $t = 10$ egy-egy megoldást ad.) Mivel az összes megoldás $k = k_0 + 1000m$, $t = t_0 + 1111m$, ahol m tetszőleges egész (ez egyszerűen következik az $(1000, 1111) = 1$ feltételből), továbbá $k = 0$ vagy $t = 0$ nem ad megoldást, ezért mindkét egyenletnek pontosan 1 megoldása van a k-ra és t-re megadott tartományban.

Vagyis a minimális távolság $1/1111000$ és ez két pontpárnál fordul elő. (3 pont)

4. feladat

Egy tetraédernek legalább négy éle legfeljebb egységnyi hosszúságú. Mekkora lehet maximálisan a tetraéder térfogata?

Megoldás: Két eset lehetséges: I. A négy él közül három egy lapot fog közre, egy pedig a negyedik csúcsból indul; II. Két lapnak a közös éltől különböző oldalairól van szó. Mindkét esetben térfogatnöveléssel (nemcsökkentéssel) eljutunk egy maximális térfogatú tetraéderhez, majd a kettő közül kiválasztjuk a nagyobbikat. (1 pont)

I. eset: Legyenek az ABC lapot határoló élek 1-nél nem nagyobbak. Ezeket rögzítve a térfogat akkor maximális, ha a D csúcs az ABC síktól a lehető legmesszebb, vagyis 1 távolságra van. Ekkor a negyedik legfeljebb egységnyi él pontosan 1 és merőleges az ABC síkra.

Az ABC háromszög AB oldalát rögzítve a háromszög területe akkor maximális, ha C a lehető legtávolabb van AB-től. Mivel AC, $BC \le 1$, ez akkor következik be, ha AC és BC mindegyike 1.

Így az ACB szög legfeljebb $60°$. Ha a szöget $60°$-ra és ezzel AB-t egységnyire növeljük, a háromszög $(AC) \cdot (BC) \cdot (\sin ACB)/2$ területe nő.

Térfogatnöveléssel eljutottunk tehát egy olyan tetraéderhez, amelynek alaplapja egységoldalú szabályos háromszög és magassága egységnyi. Ennek térfogata
$V_1 = (1/3) \cdot (\sqrt{3}/4) \cdot 1 = \sqrt{3}/12$. (3 pont)

II. eset: Legyen AB, BC, AD, $DC \le 1$. Ha ezeket és az AC élt rögzítjük, a tetraéder térfogata úgy a legnagyobb, ha az ABC és ADC síkok merőlegesek, hiszen adott alaphoz ekkor tartozik a legnagyobb magasság.

Tartsuk AC-t továbbra is rögzítetten, és növeljük az AB, BC, AD, DC oldalakat egységnyire. Ekkor B is, D is távolabb kerül AC-től, vagyis a tetraéder alapterülete és magassága is nő.

Jelölje az $ACB = ACD$ szöget α, az AC él felezőpontját pedig F. Ekkor az ABC alaplap területe $AC \cdot FB/2 = (\sin\alpha)(\cos\alpha)$, a tetraéder magassága pedig $FD = \sin\alpha$. A térfogat így $f(\alpha) = (\sin^2\alpha)(\cos\alpha)/3$.

Keressük tehát $f(\alpha)$ maximumát, ahol α hegyesszög. A mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint

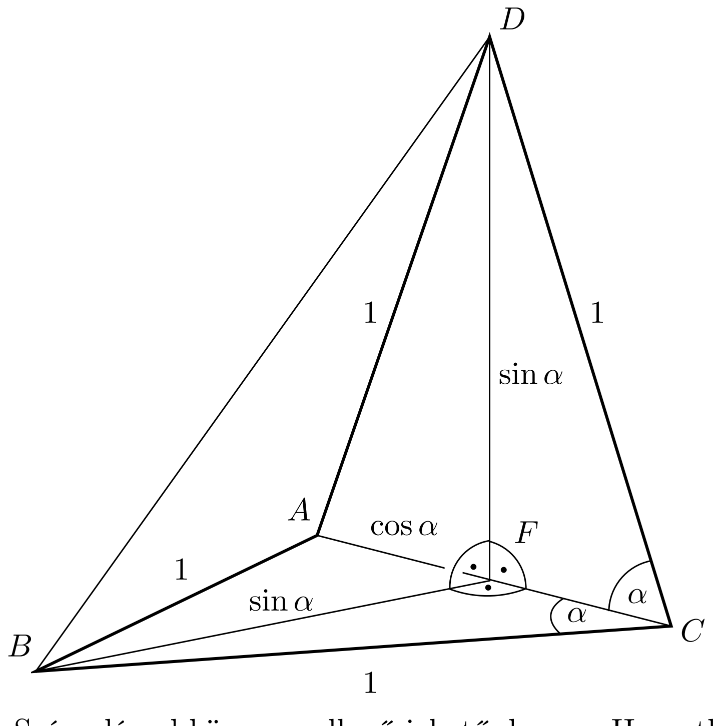
$$\sqrt[3]{\frac{3f(\alpha)}{2}} = \sqrt[3]{\cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}} \le \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha)/2 + (\sin^2\alpha)/2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Itt egyenlőség teljesülhet (ha $\cos\alpha = (\sin\alpha)/\sqrt{2}$), tehát a maximális térfogat

$$V_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

(Az $f(\alpha) = (1 - \cos^2\alpha)(\cos\alpha)/3$ függvény maximumát differenciálszámítással is megkaphattuk volna.)

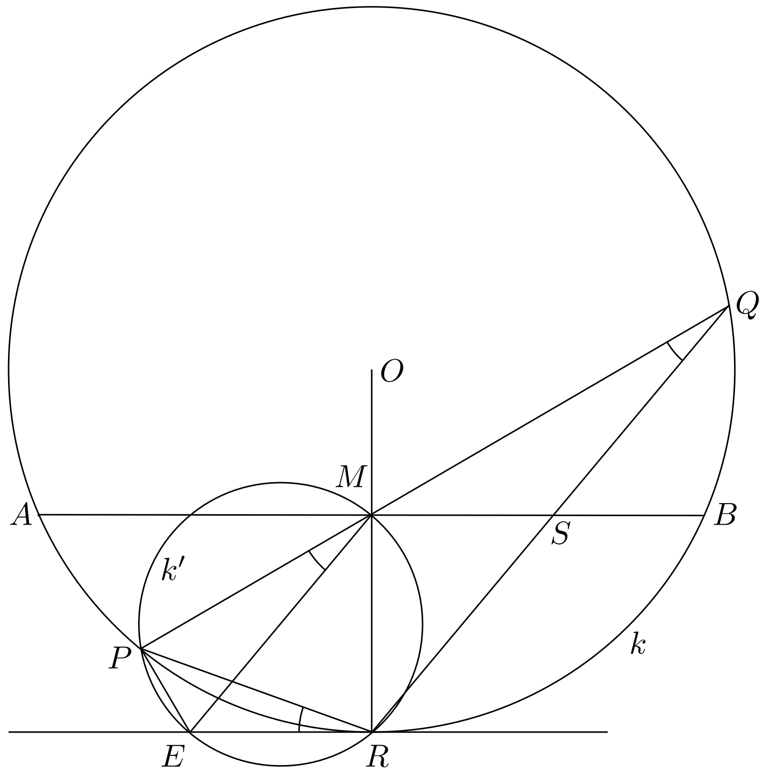
Mivel $V_2 = 2\sqrt{3}/27 < 2\sqrt{3}/24 = V_1$, ezért a feladat által keresett maximális térfogat $V_1 = \sqrt{3}/12$. (3 pont)



Megjegyzés: Számolással könnyen ellenőrizhető, hogy a II. esetben a maximális térfogat akkor áll elő, ha $AC = BD$, illetve, ami ezzel egyenértékű, ha a BAD és BCD síkok is merőlegesek egymásra.

5. feladat

Legyen AB az O középpontú k körnek egy olyan húrja, amely nem átmérő. Jelölje M az AB szakasz felezőpontját, R pedig az OM félegyenesnek a k-val vett metszéspontját. Vegyünk fel egy tetszőleges P belső pontot a rövidebbik AR íven. A PM félegyenes messe a kört a Q pontban, és legyen S az AB és QR húrok metszéspontja. Az RS és PM szakaszok közül melyik a hosszabbik?



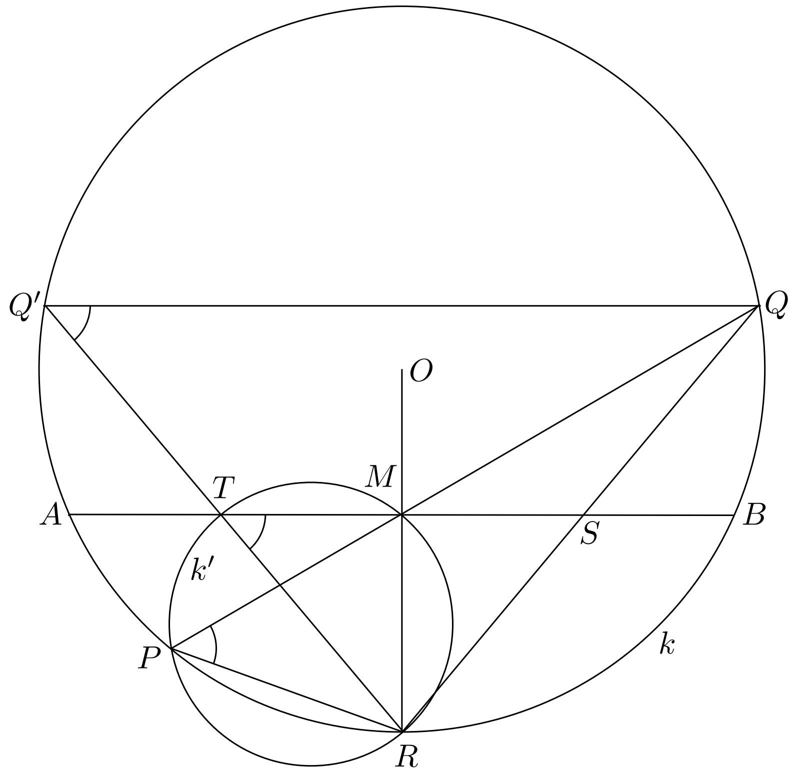
Első megoldás: Toljuk el az RS szakaszt úgy, hogy az S pont M-be kerüljön. Ekkor az R pont egy E pontba mozdul el, és az $ERSM$ négyszög paralelogramma. Mivel EM és RS párhuzamosak, az EMP szög egyenlő az RQP szöggel. (2 pont)

Az MS és ER is párhuzamosak, és MS merőleges az OR sugárra, ezért ER érintője a k körnek. Így az ERP szög a k körnek az RP ívhez tartozó érintőszárú kerületi szöge, és ezért ez is megegyezik az RQP szöggel. (2 pont)

(Persze $E \neq R$, mert különben $M = S$ teljesülne, ahonnan $P = R$ következne.) Így viszont az EMP és ERP szögek is megegyeznek, vagyis $PERM$ húrnégyszög, jelölje k' a körülírt körét. (1 pont)

Mivel ERM derékszög, a Thalész-tétel megfordítása miatt EM a k' kör átmérője. Ezért az EPM háromszögben is derékszög van a P csúcsnál. Az EPM háromszögnek PM befogója, EM pedig átfogója, ezért $PM \leq EM = RS$. (1 pont)

Egyenlőség nem állhat, mert ha PM is átmérője k'-nek, akkor $P = E$ állna fönn, azaz P rajta lenne az ER érintőn, ami csak úgy lehet, ha $P = R$, ezt pedig kizártuk. (1 pont)



Második megoldás: Tükrözzük a Q pontot az OR sugár egyenesére. A kapott Q' pont ismét a k körön van. Ha T jelöli a $Q'R$ és az AB húrok metszéspontját, akkor S képe a tükrözésnél T, és így $RS = RT$. (2 pont)

Mivel AB és $Q'Q$ is merőlegesek az OR egyenesre, ez a két szakasz párhuzamos. Így az $RQ'Q$ és RTM szögek megegyeznek. (1 pont)

(Persze $T \neq M$, mert különben $Q' = Q$ az OM egyenesen lenne, és akkor $P = R$ teljesülne.) Az $RPM = RPQ$ szög a k körben az RQ ívhez tartozó kerületi szög, és így az $RQ'Q$ szög megegyezik az RPM szöggel is. (1 pont)

Ezért az RTM és RPM szögek is megegyeznek, vagyis $PRMT$ húrnégyszög. Jelölje k' a körülírt körét. (1 pont)

Mivel TMR derékszög, a Thalész-tétel megfordítása miatt TR a k' kör átmérője, PM pedig húrja. Ezért $SR = TR \leq PM$. (1 pont)

Egyenlőség nem állhat, mert ha PM is átmérője a k' körnek, akkor PRM derékszög, vagyis P rajta van a k kör R-ben húzott érintőjén, és így $P = R$, amit a feladat feltétele kizár. (1 pont)