OKÉV
Országos Közoktatási
Értékelési és Vizsgaközpont

M13/II.

A 2005/2006. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

első (iskolai) fordulójának

javítási-értékelési útmutatója

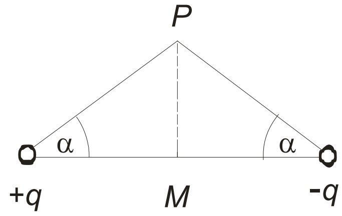
Fizika II. kategóriában

A 2005/2006. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójának
feladatai és megoldásai f i z i k á b ó l

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első három feladat és a 4/A és 4/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. *Csak 4 megoldásra adható pont.* Ha valaki 5 megoldást küld be, a 4/A és 4/B feladat közül a több pontot érő megoldást vesszük figyelembe.

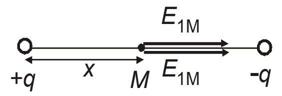
II. kategória

1. feladat. *Két, azonos nagyságú, ellentétes előjelű pontszerű töltés a rajz szerinti egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjaiban van rögzítve. A töltésektől származó elektromos térerősség nagysága az M felezőpontban 9-szer akkora, mint a háromszög felső, P csúcspontjában. Mekkora az α szög?*



Megoldás. Írjuk fel az eredő térerősséget mind az *M*, mind a *P* pontban a töltések és alkalmasan felvett távolságok segítségével! Jelöljük a háromszög alapján levő csúcsának az *M* ponttól való távolságát *x*-szel, a szárak hosszát *l*-lel! Ekkor az *M* pontbeli elektromos térerősség nagysága éppen kétszerese az egyik töltés keltette térerősségnek, hiszen az *M* pont mindkettőtől azonos távolságra van, és a térerősség-vektorok itt egyirányúak. Ezek alapján az egyik töltés keltette mező térerőssége az *M* pontban:

$$E_{1M} = k\frac{q}{x^2}.$$

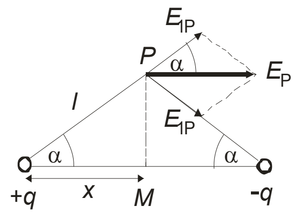


Az eredő térerősség tehát

$$E_M = 2E_{1M} = 2k\frac{q}{x^2}.$$

P pontbeli térerősség-vektorok eredője párhuzamos az alappal, és összetevőik egyenlő nagyságúak:

$$E_{1P} = k\frac{q}{l^2},$$



és az eredő térerősség az ábra szerint:

$$E_P = 2E_{1P}\cos\alpha = 2k\frac{q}{l^2}\cos\alpha.$$

A háromszög hegyesszögének koszinusza: $\frac{x}{l} = \cos\alpha.$

A feltétel szerint az *M*-beli térerőség 9-szer akkora, mint a *P*-beli, tehát

$$\frac{E_M}{E_P} = \frac{2k\frac{q}{x^2}}{2k\frac{q}{l^2}\cos\alpha} = \frac{l^2}{x^2\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{x^2}{l^2}\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^3\alpha} = 9,$$

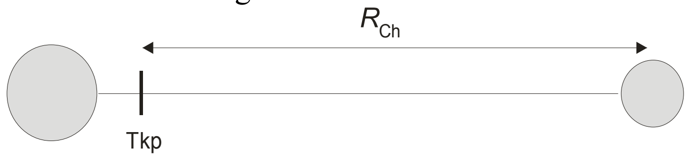
és innen a keresett szög koszinusza: $\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 0{,}48075$,

ahonnan a keresett szög:

$$\alpha = \arccos 0{,}48075 \approx \mathbf{61{,}27°}.$$

2. feladat. *Mekkora a Plútó Charon nevű holdjának a keringési ideje, ha a Plútó és a Charon távolsága* d = 19 600 km, *tömegük* $M_P = 1{,}32 \cdot 10^{22}$ kg, $M_{Ch} = 1{,}47 \cdot 10^{21}$ Kg.

Megoldás. A két égitest a közös tömegközéppontjuk körül kering, vagyis a Charon pályasugara a tömegközépponttól való távolsága.



A tömegközéppont a testek távolságát a tömegekkel fordított arányú szakaszokra osztja, vagyis

$$R_{Ch} = d \cdot \frac{M_P}{M_P + M_{Ch}}.$$

A Charonra a Plútó gravitációs ereje hat d távolságból. Ez szolgáltatja a centripetális erőt:

$$f\frac{M_P \cdot M_{Ch}}{d^2} = M_{Ch} \cdot R_{Ch} \cdot \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{f\frac{M_P}{d^2 R_{Ch}}}.$$

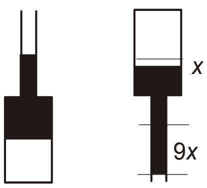
A keringési idő és a szögsebesség kapcsolata alapján:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{f\dfrac{M_P}{d^2 \cdot R_{Ch}}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{f\dfrac{M_P}{d^2 \cdot d\dfrac{M_P}{M_P + M_{Ch}}}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{f\dfrac{M_P + M_{Ch}}{d^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{f(M_P + M_{Ch})}}\,.$$

Számértékekkel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1{,}96 \cdot 10^7\,\mathrm{m}\right)^3}{6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\left(1{,}32 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg} + 1{,}47 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}\right)}} = 551088\,\mathrm{s} = 6{,}378\,\mathrm{nap} = \mathbf{6\,nap\;9\,h\;4{,}8\,perc}.$$

3. feladat. *Egy vastagabb és egy vékonyabb szakaszból álló csőben* 20 cm *magas higanyoszlop levegőt zár el az ábrán látható módon. Hogyan helyezkedik el a higany a csőben, ha a csövet nyitott szájával lefelé fordítjuk? (Adjuk meg, mennyi higany lesz a vékony és a vastag csőben!) A külső légnyomás* $1{,}02.10^5$Pa = 75 Hgcm, *a vastagabb csőszakasz sugara a vékonyabb háromszorosa, a csőszakaszok hossza* 20-20 cm, *a két csőszakaszba* 10-10 cm *higany lóg be.*



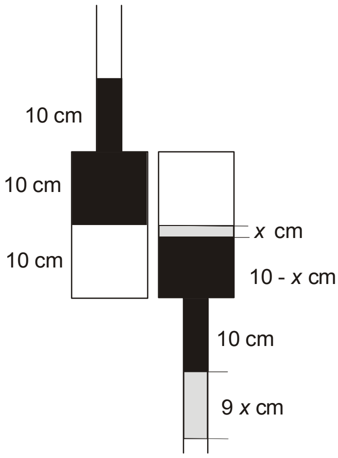
Megoldás. Mivel a csövek keresztmetszeteinek aránya 1:9, ezért a vastag csőben a higanyszint x-szel való csökkenése $9x$ szintváltozást eredményez a vékony csőben.

Feltételezzük, hogy a hőmérséklet állandó, így alkalmazhatjuk a bezárt gázra a Boyle–Mariotte-törvényt. A nyomást célszerű higanymilliméterben mérni, mivel a gázt elzáró folyadék higany!

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Itt a térfogat $h \cdot A$, ahol h a gázoszlop magassága, A a cső keresztmetszetének a területe. A gázoszlop magassága kezdetben 10 cm volt, a nyomása a légköri nyomáson felül az összesen 20 cm magas higanyoszlop nyomásával nagyobb, ezért (feltételezve, hogy minden higany a csőben marad) a nyomás és térfogat szorzata számértékekkel felírva:

$$(75+20)\,\text{Hgcm}\cdot 10\ \text{cm}\cdot A = [75-(20+8x)]\,\text{Hgcm}\cdot(10+x)\,\text{cm}\cdot A$$
,



ui. $p_1 = p_0 + 20$ Hgcm, és $p_2 = p_0 - (20 + 8x)$ Hgcm, mert a higanyoszlop hossza megnőtt $8x$-szel, (x-szel csökkent a felső részben, és $9x$-szel nőtt a vékony csőben).
Egyenletünk rendezve:

$$95\cdot 10\ \text{cm} = [55-8x]\cdot(10+x)\,\text{cm}$$

A műveletek elvégzése után:

$$950 = 550 - 80x + 55x - 8x^2,$$

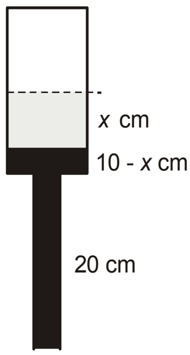
rendezve az alábbi vegyes másodfokú egyenletet kapjuk:

$$8x^2 + 25x + 400 = 0,$$

amelynek megoldása:

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4\cdot 8\cdot 400}}{16}.$$

Látható, hogy a diszkrimináns negatív, amiből az következik, hogy feltételezésünk, hogy minden higany a csőben marad helytelen volt, azaz a vékonyabb csőszakaszból kifolyik valamennyi higany. Így az előző ábránk is helytelen.
A valós helyzetet az alábbi ábra mutatja:



A vékonyabb csőszakaszt megtölti a higany, s ennek megfelelően száll lejjebb a higanyszint a vastagabb csőszakaszban.
Határozzuk meg, hogy mennyivel süllyed a higanyszint a vastag (zárt) csőszakaszban, és mennyi higany folyik ki a vékony csőből!
A Boyle–Mariotte-törvény a kiinduló- és végállapotra a numerikus adatok felhasználásával:

$$(75+20)\,\text{Hgcm}\cdot 10\ \text{cm}\cdot A = [75\ \text{Hgcm} - (20+10-x)\,\text{Hgcm}]\cdot(10+x)\,\text{cm}\cdot A.$$

A vastag cső keresztmetszetének területével egyszerűsíthetünk. A kijelölt műveletek elvégzése után ismét vegyes másodfokú egyenletet kapunk:

$$x^2 + 55x - 500 = 0.$$

Innen a vastag csőben maradó higany magasságára a következőt kapjuk:

$$x = \frac{-55 \pm \sqrt{55^2 + 4 \div 500}}{2}\ \text{cm} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 7{,}94\ \text{cm} \\ x_2 = -125{,}9\ \text{cm} \end{array}$$

Fizikai szempontból csak a pozitív x_1 érték a megoldás, $x_2 < 0$ hamis. A vastag csőben a higany szintje **7,94 centimétert süllyed, azaz benne 2,06 cm magas higanyréteg marad, míg a vékony csőszakaszt teljesen kitölti a higany.**

Ellenőrzés:

$$10\cdot 95 = 17.94\cdot(75-22.04)$$

$$950 = 450 + 45x + 10x + x^2$$

$$x^2 + 55x - 500 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-55 \pm \sqrt{55^2 + 4\cdot 500}}{2}$$

$$x_1 = 7.94\text{cm}$$

$$x_2 < 0 \rightarrow \text{hamis}$$

Meghatározható, hogy mennyi higany folyt ki és mennyi maradt a csőben.

A kezdeti összes higanytérfogat:

$$V_1 = 10\,\text{cm}\cdot A + 10\,\text{cm}\cdot\frac{A}{9} = \frac{90+10}{9}\text{cm}\cdot\text{A} = \frac{100}{9}\text{cm}\cdot A = 11{,}111\,\text{cm}\cdot A.$$

A végső térfogat:

$$V_2 = 2{,}06\,\text{cm}\cdot A + 20\,\text{cm}\cdot A = \frac{18{,}54+20}{9}\text{cm}\cdot A = \frac{38{,}54}{9}\cdot A = 4{,}282\,\text{cm}\cdot A.$$

A kifolyt higany térfogata:

$$-\Delta V = V_1 - V_2 = 11{,}111\,\text{cm}\cdot A - 4{,}282\,\text{cm}\cdot A = \mathbf{6{,}829\,cm}\cdot\boldsymbol{A}.$$

A csőrendszerből eltávozott az eredetileg benne levő higanymennyiség

$$-\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{6{,}829\,\text{cm}\cdot A}{11{,}111\,\text{cm}\cdot\text{A}} = 0{,}6146 = \mathbf{61{,}46\,\%}\ \text{-a.}$$

4./A feladat. *Vagonrendezés közben konténerrel megterhelt álló tehervagonnak ütközik egy* 3 m/s *sebességű üres vagon. Az ütközés a megengedettnél kissé nagyobb sebességgel történt, ezért a konténer megcsúszott a vagon platóján. A vagonok és a konténer tömege ugyanakkora. A konténer és a vagon platója közti csúszási súrlódás együtthatója* μ = 0,45. *A vagonok és a sínek közti gördülő ellenállás, a kerekek tömege elhanyagolható, a vagonok ütközése rugalmas és pillanatszerű.*

a) Mekkora sebességgel indul el az álló vagon az ütközés után?

b) Mekkora lesz a konténert szállító vagon és a konténer közös sebessége, amikor a konténer már áll a platóhoz képest?

c) Mennyit mozdult el a konténer a vagon platójához képest?

d) Milyen távol lesz a két vagon egymástól, amikor a konténer éppen megáll a vagon platójához képest?

Megoldás. *a)* Mivel az ütközés pillanatszerű, az ütköző kocsik által egymásra kifejtett erő mellett a tapadó súrlódási erő elhanyagolható, tehát úgy vehetjük, hogy a láda alatt hirtelen meglódul a tehervagon, s ezután kezd el a konténer a talajhoz képest nyugalomból felgyorsulni a súrlódási erő hatására. Az ütközés tehát a két vagon között jön létre. Mivel egyenlő tömegek rugalmas ütközésekor sebességcsere történik, a meglökött vagon $\boldsymbol{v}$ **= 3 m/s** sebességgel indul, s az üres vagon megáll.

b) Az ütközés után a súrlódási erő a konténert gyorsítani, a vagont pedig lassítani fogja a közös sebesség eléréséig. Eközben a vagon és a konténer közös lendülete állandó marad. Mivel a két test kezdeti lendülete mv, a közös sebesség beállta után pedig $2mu$, ahol m-mel a konténer és a vagon azonos tömegét, u-val pedig a közös sebességet jelöljük.

A közös sebesség tehát $\quad 2mu = mv \quad$ ahonnan $\quad u = \dfrac{v}{2} = \dfrac{3\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = \mathbf{1{,}5\frac{m}{s}}.$

c) Jelöljük l-lel a vagon elmozdulását addig a pillanatig, amíg a konténer megáll a platón, a konténer vagonhoz viszonyított elmozdulását pedig x-szel! Ezekkel a jelölésekkel a konténer elmozdulása a talajhoz képest

$$l - x = \frac{a}{2}t^2,$$

a vagoné pedig

$$l = vt - \frac{a}{2}t^2,$$

ahol a gyorsulás abszolút értéke a kölcsönhatás törvénye szerint mindkét testre azonos,

$$a = \mu g.$$

A konténer

$$t = \frac{v}{2a}$$

idő alatt éri el a vagonnal közös sebességet. Ennyi idő alatt a konténer a talajhoz viszonyítva

$$l - x = \frac{a}{2}\cdot t^2 = \frac{a}{2}\cdot\frac{v^2}{4a^2} = \frac{v^2}{8a}$$

utat, a vagon pedig

$$l = vt - \frac{1}{2}at^2 = v\frac{v}{2a} - \frac{1}{2}a\cdot\frac{v^2}{4a^2} = \frac{3v^2}{8a} = \frac{3v^2}{8\mu g} = \frac{3\cdot 9\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{8\cdot 0{,}45\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}75\,m}$$

utat tett meg. A konténernek az elmozdulása a vagon platóján:

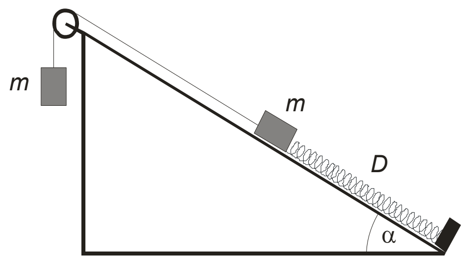
$$x = l - \frac{v^2}{8a} = \frac{3v^2}{8a} - \frac{v^2}{8a} = \frac{v^2}{4a} = \frac{9\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{4\cdot 0{,}45\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}5\,m}.$$

d) A két vagon egymástól való távolsága abban a pillanatban, amikor a konténer éppen megáll a platón (mivel a nekiütköző vagon az ütközés pillanatában megállt):

$$\Delta l = l = \mathbf{0{,}75\,m.}$$

4./B feladat. *Az* α = 30°-os *hajlásszögű sima lejtőre helyezett m* = 3 kg *tömegű testet nyugalomban tartjuk. A test egyik oldalához csigán átvetett fonál csatlakozik, amelynek végén ugyancsak m* = 3 kg *tömegű nehezék függ. A test másik oldalához egy kezdetben nyújtatlan,* D = 60 N/m *direkciós erejű rugó van erősítve, amelynek másik vége rögzített, és tengelye a fonállal egy egyenest alkot. A kezdetben nyugvó testet lökésmentesen elengedjük.*

a) Mekkora út megtétele után éri el a test a maximális sebességét?
b) Mekkora lesz a test mozgása során ez a maximális sebesség?
c) Maximálisan mennyit emelkedik a test?
d) Mennyi idő alatt teszi meg a test az utat a legfelső pontig?(Számoljunk g = 10 m/s²*-tel!)*



Megoldás. *a)* A test felfelé gyorsulva indul. Maximális sebességét akkor éri el, amikor a rá ható erők eredője egy pillanatra zérussá válik. Ekkor rá a nehézségi erő, a lejtő kényszerereje, a megterhelt fonál és a rugó hat.

A testre ható nehézségi erő (*mg*) és a lejtő kényszerereje ($mg\cdot\cos\alpha$) eredője $mg\cdot\sin\alpha$.

Vegyük észre, hogy ebben a pillanatban a test gyorsulása nulla, tehát a fonálon függő teher éppen *mg* nagyságú erővel hat, vagyis a fonálerő ebben a pillanatban *mg.* A rugó által kifejtett erő *Dx*, ahol *x* a rugó Δl rövid jelölése. Ezzel a mozgásegyenlet:

$$mg - mg\sin\alpha - Dx = 0,$$

Számadatokkal:

$$x = \frac{mg(1-\sin\alpha)}{D} = \frac{30\,\mathrm{N}\cdot(1-\sin 30°)}{60\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \mathbf{0{,}25\,m}.$$

b) A test maximális sebessége ezek után pl. a munkatételből nyerhető:

$$mgx - mg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}(2m)v_{\max}^2.$$

Itt mgx a nehézségi erőnek a süllyedő terhen végzett munkája, $-mgx/2$ (a 30° miatt) a lejtőn emelkedő testen végzett munkája, $-Dx^2/2$ a rugó által végzett munka. Innen a maximális sebesség:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mgx - Dx^2}{2m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}25\,\mathrm{m} - 60\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 0{,}0625\,\mathrm{m}^2}{2\cdot 3\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{0{,}625}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{0{,}79}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

(Paraméteresen, felhasználva, hogy $x = mg/2D$:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mgx - Dx^2}{2m}} = \sqrt{\frac{\frac{2m^2g^2}{8D} - D\frac{m^2g^2}{8D^2}}{m}} = \sqrt{\frac{mg^2}{8D}} = \sqrt{\frac{3\,\mathrm{kg}\cdot 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{8\cdot 60\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \sqrt{0{,}625}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.)$$

c) A test maximális emelkedése a 30° miatt a nehezék összes süllyedésének (ill. a rugó teljes megnyúlásának) a fele. Ismét a munkatételt alkalmazva indulástól a megállásig:

$$mgx_{\max} - mg\frac{x_{\max}}{2} - \frac{1}{2}Dx_{\max}^2 = 0,$$

Azaz

$$\frac{mg}{2} - \frac{1}{2}Dx_{\max} = 0, \quad \text{azaz} \quad \Delta h_{\max} = \frac{x_{\max}}{2} = \frac{mg}{2D} = \frac{30\,\mathrm{N}}{2\cdot 60\,\frac{N}{\mathrm{m}}} = \mathbf{0{,}25\,m}.$$

(Ez nem véletlen, ui. a legfelső pontig egy harmonikus rezgőmozgás fél periódusa jön létre, a maximális sebességet pedig amplitúdónyi út után éri el a test. Ez pedig 0,25 m, vagyis a kétszeres amplitúdó 0,5 m. A lejtő mentén maximálisan ekkora utat tesz meg a test, és az emelkedés magassága ennek a fele.)

d) A legfelső pontig történő emelkedés ideje a fél rezgésidő:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\cdot\sqrt{\frac{2m}{D}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 3\,\mathrm{kg}}{60\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \mathbf{0{,}993\,s \approx 1\,s}.$$

Értékelési javaslat

Mindegyik feladat teljes megoldásáért **20 pont** jár.

A tanár javítsa ki a dolgozatokat és állapítsa meg a pontszámot. Természetesen a közölttől eltérő gondolatmenetet is el kell fogadni, ha helyes. Hiányosságok miatt tört pontszámot kell levonni. Abban az esetben, ha a gondolatmenet jó, durva numerikus hibáért maximálisan **5 pont** vonható le. A tanár a dolgozatra írja rá, hogy mindegyik feladat megoldását hány pontra értékeli.

A dolgozat pontszáma a négy feladatra adott pontszámok összege, maximálisan **80 pont.** Ugyanazon feladat második, vagy harmadik módon történt megoldásáért nem adható külön pont.

Beküldendők mindazok a dolgozatok, amelyek összpontszáma **40** vagy több. *Csak 4 feladat pontértéke számíthat be az összpontszámba!*

JAVASOLT RÉSZPONTSZÁMOK

1. feladat.

Az M pontbeli térerőség meghatározása **5 pont.** Az eredő térerősség felírása a P pontban **5 pont.** A keresett szög kifejezése a geometriai adatokkal **3 pont.** A keresett szög koszinuszára helyesen felírt harmadfokú egyenlet **4 pont.** A keresett szög koszinuszának kifejezése **2 pont.** A keresett szög numerikus megadása **1 pont.**

2. feladat.

A Charon közös tömegközépponttól való távolságának helyes felírása **4 pont.** A szögsebesség meghatározásához a centripetális erő helyes felírása **6 pont.** A szögsebesség kifejezése **4 pont.** A keresett keringési idő kifejezése **4 pont.** A keringési idő numerikus megadása **2 pont.**

3. feladat.

A megfordított csőrendszer nyomás–térfogat viszonyainak helyes felírása **4 pont.** A süllyedés mértékére kapott egyenlet megoldásának értelmezése **4 pont.** Az új helyzetre felírt helyes egyenlet **4 pont.** A süllyedés mértékének meghatározása **3 pont.** A kifolyt higanymennyiség meghatározása akár térfogatban (*A* függvényében), akár százalékban **5 pont.**

4./A feladat

a) A sebességcsere felismerése **2 pont.** *b)* A közös sebesség meghatározása **3 pont.** *c)* A vagon és a konténer elmozdulásának meghatározása a csúszás végéig **4 pont.** A két test gyorsulásának megadása **2 pont.** A mozgásidő meghatározása **2 pont.** A konténer elmozdulása a talajhoz viszonyítva **2 pont.** A vagon elmozdulása a talajhoz viszonyítva **2 pont.** A konténer elmozdulása a platóhoz képest **2 pont.** *d)* A vagonok egymástól való távolságának megadása **1 pont.**

4./B feladat.

a) Annak felismerése, hogy a maximális sebesség elérése pillanatában a testre ható erők eredőjének 0-nak kell lennie **3 pont.** A mozgásegyenlet helyes felírása **3 pont.** A keresett út kiszámítása **3 pont.** *b)* A munkatétel (energia-megmaradás tétel) helyes felírása **4 pont.** A maximális sebesség meghatározása **2 pont.** *c)* A test maximális emelkedésének meghatározása **3 pont.** *d)* A test maximális emelkedésig eltelt idő meghatározása **2 pont.**