OKÉV
Országos Közoktatási
Értékelési és Vizsgaközpont

M13/I.

A 2005/2006. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

első (iskolai) fordulójának

javítási-értékelési útmutatója

Fizika I. kategóriában

A 2005/2006. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójának
feladatai és megoldásai f i z i k á b ó l

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első három feladat és a 4/A és 4/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. *Csak 4 megoldásra adható pont.* Ha valaki 5 megoldást küld be, a 4/A és 4/B feladat közül a több pontot érő megoldást vesszük figyelembe.

I. kategória

1. feladat. *Ideális gázzal* 31,4 J *hőt közlünk. A gáz állandó,* $1{,}4\cdot 10^4$ Pa *nyomáson tágul* 0,3 liter *térfogatról* 0,8 liter *térfogatúra.*

a) Mennyi munkát végzett a gáz?
b) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása?
c) Lehet-e a gáz nemesgáz?
d) Mekkora az állandó nyomáshoz tartozó moláris hőkapacitás?

Megoldás. Adatok: $Q = 31{,}4$ J; $p = 1{,}4\cdot 10^4$ Pa = áll.; $V_1 = 3\cdot 10^{-4}$ m^3; $V_2 = 8\cdot 10^{-4}$ m^3.

a) A gáz által végzett munka:

$$W_{\text{gáz}} = p\Delta V = p\left(V_2 - V_1\right) = 1{,}4\cdot 10^4\ \text{Pa}\cdot(8-3)\cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 = \mathbf{7\ J}.$$

b) A belső energia megváltozása:

$$\Delta E = Q + W = Q - W_{\text{gáz}} = 31{,}4\ \text{J} - 7\ \text{J} = \mathbf{24{,}4\ J}.$$

c) El kell dönteni, hogy a részecskék szabadsági foka 3, vagy ettől különböző. Ismeretes, hogy a gáz energiaváltozása ill. izobár állapotváltozás esetén az általa felvett hő a fokszámmal a következő kapcsolatban van:

$$\Delta E = \frac{f}{2} nR\Delta T \qquad \text{ill.} \qquad Q = \frac{f+2}{2} nR\Delta T.$$

A felvett hő és energiaváltozás aránya már csak a fokszámtól függ:

$$\frac{Q}{\Delta E} = \frac{f+2}{f} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{Q}{\Delta E}\cdot f = f + 2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{Q}{\Delta E} - 1\right)\cdot f = 2,$$

ahonnan e gáz részecskéinek szabadsági foka:

$$f = \frac{2}{\dfrac{Q}{\Delta E} - 1} = \frac{2}{\dfrac{31{,}4}{24{,}4} - 1} = \mathbf{6{,}97},$$

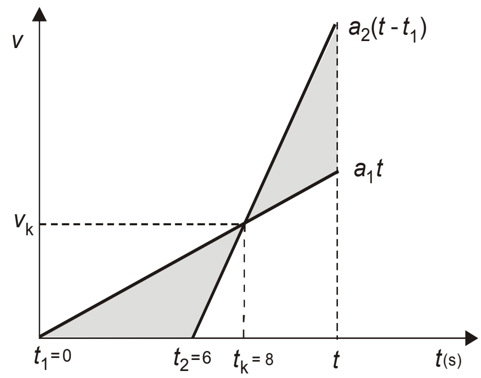
tehát ez a gáz nem lehet nemesgáz (valamilyen sokkal bonyolultabb összetételű anyag lehet).

d) A moláris hőkapacitás (mólhő) állandó nyomáson

$$C_{\text{p}} = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{f+2}{2}R = \frac{8{,}97}{2}\cdot 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} = \mathbf{37{,}3\frac{J}{mol\cdot K}}.$$

2. feladat. *Egyenes pályán két, egyenletesen gyorsuló pontszerű test indul ugyanarról a helyről ugyanabba az rányba, de a nagyobb gyorsulású test* 6 s-*mal később. Az első test indulása után* 8 s-*mal már megegyezik a sebességük. Mikor éri utol a később induló a másikat?*

I. Megoldás. Jelöljük a 8-ik másodpercben felvett közös sebességet v_k-val, az első test gyorsulását a_1-gyel, a másodikét a_2-vel! Mivel azonos pontból indultak a testek, találkozásukig azonos nagyságú utat tettek meg: $s_1 = s_2$. A két test által megtett út gyorsulásaikkal és a megfelelő időszakaszokkal kifejezve az ábra szerint:



$$\frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}a_2(t-t_2)^2.$$

Itt t_1 és t_2 a két test indulási időpontját, t_k pedig a közös sebesség elérésének időpontját jelenti.
A két ismeretlen gyorsulás a (szintén ismeretlen) közös sebességgel és a felvételéig eltelt idővel kifejezhető:

$$a_1 = \frac{v_k}{t_k}, \qquad a_2 = \frac{v_k}{t_k - t_2}.$$

Ezeket beírva — a 2-vel egyszerűsített — első egyenletünkbe:

$$\frac{v_k}{t_k}t^2 = \frac{v_k}{t_k - t_2}(t-t_2)^2.$$

Az ismeretlen nagyságú közös sebesség kiesik, a nevezők eltüntetése után a következőt kapjuk:

$$(t_k - t_2)t^2 = t_k(t-t_2)^2.$$

A műveleteket elvégezve:

$$t_k t^2 - t_2 t^2 = t_k t^2 - 2t_k t_2 t + t_k t_2^2.$$

A két oldalról a $t_k t^2$ -et elhagyva, a megmaradt tagokban a t_2 közös tényezővel egyszerűsítve és nullára redukálva másodfokú egyenletet kapunk:

$$t^2 - 2t_k t + t_2 t_k = 0.$$

Ennek megoldása:

$$t_{1,2} = \frac{2t_k \pm \sqrt{4t_k^2 - 4t_2 t_k}}{2} = t_k \pm \sqrt{t_k(t_k - t_2)} = 8\,\mathrm{s} \pm \sqrt{8\,\mathrm{s}\cdot(8\,\mathrm{s} - 6\,\mathrm{s})} = \begin{matrix}12\,\mathrm{s}\\ 4\,\mathrm{s}\end{matrix}.$$

Mivel a közös sebesség eléréséig 8 másodpercnek el kell telnie, a 4 s –os megoldás nem fogadható el fizikai szempontból, vagyis a helyes megoldás, a két test újbóli találkozása az első test indulásának időpontjától mérve t **= 12 s** múlva következik be.

II. Megoldás. A grafikon szerint a két test akkor tesz meg egyenlő nagy utat, ha a két satírozott, háromszög alakú terület megegyezik. A háromszögek területe (alap x magasság)/2 –vel számítható:

$$\frac{t_2 v_k}{2} = \frac{a_2(t-t_2) - a_1 t}{2}(t - t_k)$$

Innen részben numerikusan folytatva a megoldást, a gyorsulásokat sebességváltozás és eltelt idő hányadosaként felírva az ábra alapján:

$$\frac{1}{2}v_k \cdot 6 = \frac{1}{2}\left[\frac{v_k}{2}\cdot(t-6) - \frac{v_k}{8}\cdot t\right](t-8),$$

ugyanis a két gyorsulás félnumerikusan így írható: $a_1 = \frac{v_k}{8}$ ill. $a_2 = \frac{v_k}{2}$.

A közös sebesség kiesik, ½-del egyszerűsíthetünk, így a következőt kapjuk:

$$6 = \left(\frac{t}{2} - 3 - \frac{t}{8}\right)(t-8).$$

A két oldalt 8-cal szorozva és összevonva:

$$48 = (3t - 24)(t-8).$$

Rendezés után vegyes másodfokú egyenletünk:

$$t^2 - 16t + 48 = 0.$$

Ennek megoldása:

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 48}}{2} = \begin{matrix}\mathbf{12}\\ 4\end{matrix},$$

mint az első megoldásban.

3. feladat. *Egy áramkörben tönkrement egy* 150 Ω*;* 10 W *feliratú ellenállás. A hiányt egy* 200 Ω; 5 W *és egy* 600 Ω; 5 W *jellemzőjű ellenállás párhuzamos kapcsolásával pótoljuk.*

a) Milyen szempontból egyenértékű ez a kapcsolás az eredeti kapcsolással és milyen szempontból nem?

b) Adjunk meg 1-1 olyan ellenálláspárt, amely párhuzamos ill. soros kapcsolásnál minden szempontból helyettesíti az eredeti kapcsolást!

Megoldás. *a)* A 200 Ω-os és 600 Ω-os ellenállások párhuzamos kapcsolása az eredetivel egyező eredő ellenállást és teljesítményfelvételt eredményez:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200\Omega \cdot 600\Omega}{800\Omega} = \mathbf{150\,\Omega},$$

A helyettesítés a fenti érték szempontjából megfelel az eredeti kapcsolásnak, azonban, mivel a párhuzamos kapcsolásnál a teljesítmény fordítottan arányos az ellenállással ($P = \frac{U^2}{R}$), a 200 Ω-os ellenállást túlterheljük.

b) Párhuzamos kapcsolásnál alkalmazhatjuk pl. a 200 Ω; 7,5 W és 600 Ω; 2,5 W feliratú ellenállásokat. Ebben az esetben egyik ellenállás sincs túl-, vagy alulterhelve.
Az eredeti (tönkrement) ellenállás adataiból ugyanis kitűnik, hogy az

$$U = \sqrt{PR} = \sqrt{10\text{ W}\cdot 150\,\Omega} = 38{,}73\text{ V}$$

feszültségre volt kapcsolva, a helyettesítő ellenállások párhuzamos kapcsolásánál

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{1500\text{ V}^2}{200\,\Omega} = 7{,}5\text{ W}, \quad \text{ill.} \quad P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{1500\text{ V}^2}{600\,\Omega} = 2{,}5\text{ W}.$$

Soros kapcsolásnál a teljesítmény egyenesen arányos az ellenállással. Így megoldás például a 30 Ω; 2 W és 120 Ω; 8 W megfelel a követelményeknek. Az eredő ellenállás soros kapcsolásnál $R_e = R_1 + R_2 = 30\,\Omega + 120\,\Omega = 150\,\Omega$, a kialakuló áram erőssége a két ellenálláson azonos, $I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{2\text{ W}}{30\,\Omega}} = 0{,}258\text{ A}$, ill. $I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{8\text{ W}}{120\,\Omega}} = 0{,}258\text{ A}$. Az ellenállásokra eső feszültségek összege kiadja az eredeti feszültséget:

$$U_1 = \sqrt{P_1 R_1} = \sqrt{2\text{ W} \cdot 30\,\Omega} = 7{,}746\text{ V}, \quad \text{ill.} \quad U_2 = \sqrt{P_2 R_2} = \sqrt{8\text{ W} \cdot 120\,\Omega} = 30{,}984\text{ V},$$

ezek összege valóban 38,73 V, amekkora eredetileg a kiégett ellenállásra esett. Ebben az esetben sincs egyik ellenállás túl-, vagy alulterhelve.

4./A feladat. *Egy rugós játékpuska feszítetlen rugója a cső nyílásáig ér. A rugót* Δl = 12 cm-*rel összenyomjuk, majd a rugó végére a megszokottnál egy nagyobb,* m = 50 g *tömegű golyót helyezünk. A rugó ezt a golyót a talajtól számított* y = 1 m *magasból, vízszintes irányban lövi ki. A lövés távolságának vízszintes vetülete a cső végétől számítva* x = 86 cm *hosszú.*

a) Mekkora a rugóállandó?
b)Függőleges kilövésnél a cső nyílásától mérve milyen magasra képes lőni ezt a golyót a puska?
c) Mennyi a függőleges kilövésnél a golyó legnagyobb sebessége?
(A rugó tömegét és a súrlódást elhanyagolhatjuk. g = 9,81 m/s^2*)*

Megoldás. *a)* A vízszintes hajítás adataiból következtethetünk a rugóállandóra. Az esés ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2\text{m}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}45\text{ s},$$

a kilövés sebessége a mozgás vízszintes vetülte alapján: $v = \frac{x}{t} = \frac{0{,}86\text{ m}}{0{,}45\text{ s}} = 1{,}91\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A rugóállandót az energiamegmaradás törvényéből kaphatjuk:

$$\frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahonnan a rugóállandó:

$$D = m\frac{v^2}{(\Delta l)^2} = 5\cdot 10^{-2}\text{kg}\frac{1{,}91^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0{,}12^2\ \text{m}^2} = \mathbf{12{,}67\frac{N}{m}}.$$

b) Függőleges kilövésnél pl. a munkatétel alapján:

$$-mgh_ö + \frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = 0,$$

ahol $h_ö$ az összenyomott rugótól mért magasságot jelöli.

$$h_ö = \frac{1}{2}\frac{D(\Delta l)^2}{mg} = \frac{1}{2}\cdot\frac{12{,}67\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 0{,}12^2\text{m}^2}{5\cdot 10^{-2}\text{kg}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}186\text{ m} = 18{,}6\text{ cm},$$

tehát a puskacső nyílásától mért emelkedés: $h = h_0 - \Delta l$ = 18,6 cm – 12 cm = **6,6 cm.**

c) A rugón levő golyó a rugóval való érintkezés alatt harmonikus rezgőmozgást végez, amelynek körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{12{,}67\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}}} = 15{,}92\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A maximális sebességet akkor éri el a golyó, amikor a rá ható erők eredője zérussá válik (addig nő a sebessége, ezután csökken). A mozgásegyenlet erre a pillanatra alkalmazva:

$$D\Delta l_0 - mg = 0.$$

Innen a rugó megnyúlása a maximális sebesség eléréséig:

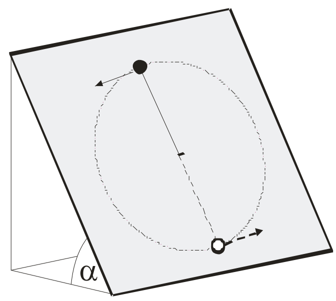
$$\Delta l_0 = \frac{mg}{D} = \frac{5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{12{,}67\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 0{,}0387\ \mathrm{m} = 3{,}87\ \mathrm{cm}.$$

Ez a feszítetlen helyzettől az egyensúlyi helyzetig vett távolság. A rezgés amplitúdója pedig:

$$A = \Delta l - \Delta l_0 = 12\ \mathrm{cm} - 3{,}87\ \mathrm{cm} = 8{,}13\ \mathrm{cm} = 0{,}0813\ \mathrm{m}.$$

A maximális sebesség a harmonikus rezgőmozgás összefüggéseiből:

$$v_{\max} = A\omega = 0{,}0813\ \mathrm{m}\cdot 15{,}92\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 1{,}294\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{1{,}3\,\frac{m}{s}}.$$



4./B feladat. *Egy lejtő felületén súrlódásmentesen csúszva egy test körmozgást végez az egyik végén a lejtőhöz rögzített fonál másik végén. A pálya legalsó pontján a fonálerő nyilvánvalóan nagyobb, mint a pálya legfelső pontján. Az általunk vizsgált mozgásnál a két fonálerő különbsége háromszorosa a testre ható nehézségi erőnek. Határozzuk meg a lejtő hajlásszögét!*

Megoldás. Írjuk fel a mozgásegyenletet a körpálya felső és az alsó pontjára! Mivel e két helyen nincs a testnek érintőleges gyorsulása (sebessége minimális ill. maximális a felső ill. alsó pontban), a mozgásegyenletek így írhatók:

$$K_F + mg\sin\alpha = m\frac{v_F^2}{l} \quad\rightarrow\quad K_F = m\frac{v_F^2}{l} - mg\sin\alpha \qquad \text{fent}$$

$$K_A - mg\sin\alpha = m\frac{v_A^2}{l} \quad\rightarrow\quad K_A = m\frac{v_A^2}{l} + mg\sin\alpha \qquad \text{alul.}$$

A fonálerők különbsége:

$$K_A - K_F = \frac{m\left(v_A^2 - v_F^2\right)}{l} + 2mg\sin\alpha \tag{1}$$

Az energia-megmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mv_F^2 + mg2l\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Innen

$$4gl\sin\alpha = v_A^2 - v_F^2. \tag{2}$$

(1) és (2) alapján

$$K_A - K_F = \frac{m4gl\sin\alpha}{l} + 2mg\sin\alpha = 6mg\sin\alpha.$$

A feltétel szerint $K_A - K_F = 3mg$, vagyis $6mg\sin\alpha = 3mg$. Innen $\sin\alpha = 0{,}5$, vagyis a lejtő hajlásszöge:

$$\alpha = \arcsin 0{,}5 = \mathbf{30°}.$$

Értékelési javaslat

Mindegyik feladat teljes megoldásáért **20 pont** jár.

A tanár javítsa ki a dolgozatokat és állapítsa meg a pontszámot!
Természetesen a közölttől eltérő gondolatmenetet is el kell fogadni, ha helyes. Hiányosságok miatt tört pontszámot kell levonni. Abban az esetben, ha a gondolatmenet jó, durva *numerikus* hibáért maximálisan **5 pont** vonható le. A tanár a dolgozatra írja rá, hogy mindegyik feladat megoldását hány pontra értékeli.

A dolgozat pontszáma a négy feladatra adott pontszámok összege, maximálisan **80 pont.** Ugyanazon feladat második, vagy harmadik módon történt megoldásáért nem adható külön pont.

Beküldendők mindazok a dolgozatok, amelyek összpontszáma **40** vagy több. *Csak 4 feladat pontértéke számíthat be az összpontszámba!*

JAVASOLT RÉSZPONTSZÁMOK

1. feladat.
a) Helyes megoldásért **3 pont**. *b)* Helyes megoldásért **3 pont.** *c)* Helyes megoldásért **10 pont**. *d)* Helyes megoldásért **4 pont.**

2. feladat.
A jelenség helyes értelmezése **2 pont.** A gyorsulások helyes felírása a közös sebesség felhasználásával **5 pont.** Egyenlet helyes felírása a keresett és a részidőkre **5 pont.** A másodfokú egyenlet megoldása **5 pont.** A kapott eredmény helyes értelmezése **3 pont.** (A válasz akkor is helyes, akár az első test indulásától, akár a második test indulásától adja meg helyesen az eltelt időt!)
Aki a második megoldás szerint próbálkozott, annak a területekre helyesen felírt egyenletért **10 pont** jár. Az ismeretlen közös sebesség kiejtéséért **4 pont,** a másodfokú egyenlet megoldásáért **3 pont,** a kapott eredmények helyes értelmezéséért **3 pont** adható.

3. feladat.
a) Annak ellenőrzése, hogy eredő ellenállás szempontjából megfelelnek a megadott ellenállások **3 pont.** Annak felismerése, hogy túlterhelés szempontjából nem felelnek meg **3 pont.** *b)* Párhuzamos kapcsoláshoz talált megfelelő ellenálláspár megadása indokolással **5 pont.** Soros kapcsolásra adott helyes értékpár megadása **4 pont.** A helyes indokolás megadása **5 pont.**

4./A feladat.

a) A rugóállandó helyes meghatározása **5 pont.** *b)* Az emelkedés helyes meghatározása **5 pont.** A maximális sebesség meghatározása **10 pont.**

4./B feladat.
A mozgásegyenletek helyes felírása **5 pont.** A fonálerők különbségét megadó egyenlet felírása **3 pont.** Az energia-megmaradás tételének helyes felírása **5 pont.** A hajlásszög fonálerő-különbséggel való helyes kifejezése **4 pont.** A hajlásszög szinuszának kifejezése **2 pont.** A hajlásszög helyes értékének megadása **1 pont.**