OKÉV Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

A 2004-2005. tanévi matematika OKTV I. kategória első (iskolai) fordulója feladatlapjainak megoldásai

1. feladat

Melyek azok a 10-es számrendszerbeli háromjegyű pozitív egész számok, amelyeknek számjegyei közül valamelyik a 3-as, továbbá a számjegyek összege és szorzata egyenlő? 9 pont

1. megoldás: A keresett háromjegyű szám egyik számjegye a 3-as, a két ismeretlen számjegyet jelölje a és b.

A feltétel szerint

(1) $$a+b+3=3\cdot a\cdot b.$$ 1 pont

(1) átalakítható

(2) $$3\cdot a\cdot b-a-b=3.$$

A (2) egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozva és a kapott egyenlet mindkét oldalához 1-et adva:

(3) $$9ab-3a-3b+1=10.$$

(3) bal oldala szorzattá alakítható:

(4) $$(3a-1)\cdot(3b-1)=10.$$ 3 pont

Mivel a és b pozitív egész számok, továbbá (4)-ben a $(3a-1)$ és a $(3b-1)$ tényezők mindegyike 3-mal osztva 2 maradékot ad, ezért csak

$$3a-1=2 \qquad \text{és} \qquad 3b-1=5$$

lehetséges (a $3a-1=5$ és $3b-1=2$ eset nyilván ugyanazokat a számjegyeket adja), ezért a hiányzó számjegyekre azt kapjuk, hogy

$$a=1 \qquad \text{és} \qquad b=2.$$ 3 pont

A feladat feltételeinek hat szám felel meg:

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad \text{és} \quad 321.$$ 2 pont

Összesen: 9 pont

2. megoldás: A keresett szám számjegyei: 3, a, b (ahol $a, b\in \mathbf{N}$ és $1\le a\le 9$, $1\le b\le 9$).

A feladat feltétele alapján felírható

(1) $$3\cdot a\cdot b=3+(a+b).$$ 1 pont

Ebből következik, hogy $a+b$ osztható 3-mal, azaz $a+b$ szóbajöhető értékei

3, 6, 9, 12, 15, 18. 2 pont

Ezeket az értékeket (1)-be helyettesítve ab megfelelő értékeit kapjuk:

$a+b$	3	6	9	12	15	18
ab	2	3	4	5	6	7

1 pont

Megoldva az

$$a+b=3,$$
$$ab=2$$

egyenletrendszert

$a=2$ és $b=1$, illetve $a=1$ és $b=2$ 1 pont

adódik.

A többi eset nem ad egész a, b értékeket, tehát a feladatnak nem megoldásai. 2 pont

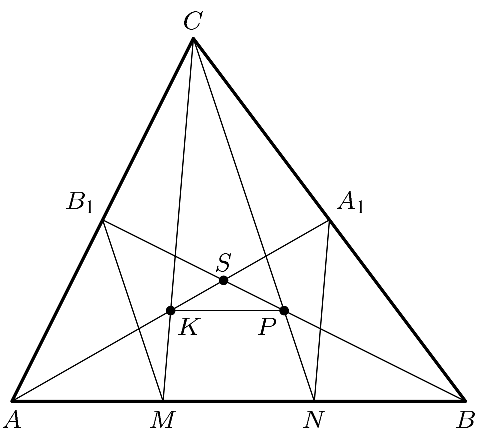
Így a keresett háromjegyű számok

123, 132, 213, 231, 312, és 321. 2 pont

Összesen: 9 pont

2. feladat

Az ABC háromszög AB oldalán vegyük föl az M és N pontokat úgy, hogy $AM = MN = NB$ legyen. Jelölje A_1 a BC és B_1 az AC oldalak felezőpontját, valamint P legyen a BB_1 és CN, K pedig az AA_1 és CM szakaszok metszéspontja! Fejezze ki a PK szakasz hosszát az AB oldal hosszával! 10 pont



Megoldás: Készítsünk ábrát!

Jelöljük az AA_1 és BB_1 súlyvonalak metszéspontját – az ABC háromszög súlypontját – S-sel.

Mivel MB_1 az ANC háromszög középvonala, ezért MB_1 párhuzamos NC-vel. Ez azt is jelenti, hogy $MB_1 \parallel NP$, vagyis NP a B_1BM háromszög középvonala, azaz

(1) $$BP = \frac{1}{2}BB_1.$$ 2 pont

Mivel BB_1 súlyvonal, ezért

(2) $$BS = \frac{2}{3}BB_1 \qquad (\text{illetve } BB_1 = \frac{3}{2}BS).$$

Így (1) és (2) felhasználásával

$$SP = BS - BP,$$

$$SP = BS - \frac{1}{2}BB_1 = BS - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}BS = \left(1 - \frac{3}{4}\right)BS.$$

(3) $$SP = \frac{1}{4} BS.$$ 3 pont

Hasonlóan adódik, hogy

(4) $$SK = \frac{1}{4} SA.$$ 2 pont

A (3) és (4) összefüggések együttesen azt jelentik, hogy az S középpontú, $4:1$ arányú középpontos hasonlósági transzformáció a P pontot a B-be, a K pontot pedig az A pontba viszi, azaz a KP szakasz transzformációval kapott képe az AB szakasz lesz.

Emiatt egyrészt PK párhuzamos AB-vel, másrészt a párhuzamos szelőszakaszok tétel értelmében

$$PK = \frac{1}{4} AB,$$

és éppen ennek kiszámítása volt a feladat. 3 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat

Oldja meg az

$$x^2 \cdot y^2 - 7x \cdot y^2 + 10y^2 + 44xy - 154y + 484 = 0$$

egyenletet, ha x és y pozitív prímszámok! 11 pont

Megoldás: A feltétel ($y > 0$) miatt az egyenlet írható

(1) $$x^2 \cdot y - 7xy + 10y + 44x - 154 + \frac{484}{y} = 0$$

alakban is.

Mivel (1) bal oldalának első öt tagja egész szám, ezért $\frac{484}{y}$ is egész szám. Ebből következik, hogy y csak a 484 pozitív prímosztója lehet. 3 pont

A 484 szám prímtényezős felbontása:

(2) $$484 = 2^2 \cdot 11^2.$$

(2) miatt $y = 2$ vagy $y = 11$ jön szóba. 3 pont

Ha $y = 2$, akkor (1)-ből következően:

(3) $$x^2 + 15x + 54 = 0.$$

A (3) egyenlet gyökei: $x_1 = -6$ és $x_2 = -9$, ezek nem pozitív prímszámok, tehát nem felelnek meg a feladat feltételeinek, ezért nem megoldások. 2 pont

Ha $y = 11$, akkor ugyancsak (1)-ből következően

(4) $$11x^2 - 33x = 0.$$

A (4) egyenlet gyökei: $x_3 = 0$ és $x_4 = 3$.

Nyilván csak $x_4 = 3$ lehet megfelelő. 2 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az

$$x = 3, \qquad y = 11$$

számpár valóban megoldása az egyenletnek, tehát ez a számpár az egyetlen, amely kielégíti a feladat feltételeit. 1 pont

Összesen: 11 pont

4. feladat

Van-e olyan n természetes szám, amelyre az $A = 3n^2 + 3n + 7$ kifejezés egy természetes szám köbével egyenlő? 12 pont

Megoldás: Tegyük fel, hogy létezik olyan n természetes szám, amelyre

$$3n^2 + 3n + 7 = m^3 \quad (\text{ahol } m \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

Vizsgáljuk az (1) egyenlet lehetséges megoldásait az m szám 3-mal való osztási maradékai szerint! 2 pont

Ha $m = 3k$ ($k \in \mathbf{N}$), akkor (1) jobb oldala 3-mal osztható, míg a bal oldal 3-mal osztva 1 maradékot ad, ezért ilyen m szám nem létezhet. 2 pont

Hasonlóképpen nem valósulhat meg az $m = 3k + 2$ eset sem, mert ekkor

$$3n^2 + 3n + 7 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8, \tag{2}$$

és jól látható, hogy (2)-ben a jobb és a bal oldal 3-mal osztva különböző maradékot ad, mégpedig a bal oldal 1-et, a jobb oldal 2-t. 2 pont

Ha $m = 3k + 1$, akkor

$$3n^2 + 3n + 7 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1. \tag{3}$$

(3)-ból rendezés és egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$n^2 + n + 2 = 9k^3 + 9k^2 + 3k,$$

azaz

$$n(n+1) + 2 = 3k \cdot (3k^2 + 3k + 1). \tag{4}$$

2 pont

Nyilvánvaló, hogy (4) jobb oldala 3-mal osztható, ezért a bal oldalnak is oszthatónak kellene lennie 3-mal. A bal oldal 3-mal való osztási maradéka

$n = 3p$ esetén 2,

$n = 3p + 1$ esetén 1,

$n = 3p + 2$ esetén 2,

vagyis sohasem lesz 0. 3 pont

Ezek alapján kijelenthetjük, hogy nincs olyan n természetes szám, amelyre az $A = 3n^2 + 3n + 7$ kifejezés egy természetes szám köbe lenne. 1 pont

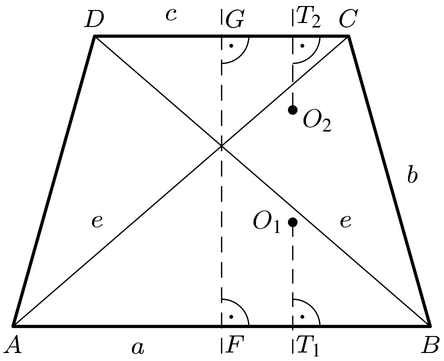
Összesen: 12 pont

Megjegyzés. A feladat megoldása röviden úgy fogalmazható, hogy a $3(n+1)n+7$ kifejezés 9-cel osztva 7 vagy 4 maradékot adhat, míg egy köbszám 9-es maradéka 0, +1 vagy -1 lehet.

5. feladat

A szimmetrikus $ABCD$ trapéz hosszabbik alapja AB. Az ABC háromszögbe írt kör középpontja O_1, a BCD háromszögbe írt kör középpontja O_2.

Bizonyítsa be, hogy O_1O_2 merőleges AB-re! 13 pont



Megoldás: Készítsünk vázlatos ábrát!

A megoldás során a háromszögnek azt az ismert tulajdonságát használjuk ki, hogy a beírt kör az egyik csúcsból kiinduló két oldalt olyan pontokban érinti, amelyek a csúcstól $s-x$ távolságra vannak (s a háromszög félkerülete, x a csúccsal szemközti oldal hossza). 2 pont*

Bocsássunk merőlegest O_1-ből AB-re, O_2-ből CD-re, a talppontok legyenek T_1 és T_2.

Az ABC háromszög kerülete (az ábra jelöléseivel) (ahol $AC=e$):

$$K_{ABC}=a+b+e,$$

ezért

$$T_1B=\frac{a+b+e}{2}-e,$$

azaz

(1) $$T_1B=\frac{a+b-e}{2}.$$ 2 pont

Az (1) összefüggés miatt

$$FT_1=\frac{a}{2}-\frac{a+b-e}{2},$$

vagyis

(2) $$FT_1=\frac{e-b}{2}.$$ 2 pont

A BCD háromszög kerülete:

$$K_{BCD}=b+c+e,$$

ahol a szimmetria miatt $BD=AC=e$, ezért

$$T_2C=\frac{b+c+e}{2}-e,$$

tehát

(3) $$T_2C=\frac{b+c-e}{2}.$$ 2 pont

A (3) összefüggésből következően:

$$GT_2 = \frac{c}{2} - \frac{b+c-e}{2},$$

azaz

$$GT_2 = \frac{e-b}{2}. \tag{4}$$ 2 pont

A (2) és (4) eredmények együttesen azt jelentik, hogy $GT_2 = FT_1$,

azaz az FT_1T_2G négyszög téglalap. 2 pont

Eszerint a T_1, O_1, O_2 és T_2 pontokat tartalmazó egyenes merőleges az AB egyenesre, ez pedig éppen a bizonyítandó állítás. 1 pont

Összesen: 13 pont

Megjegyzés. A *-gal jelzett 2 pontot akkor is kapja meg a versenyző, ha a felhasznált ismeretet nem bizonyítja, csak hivatkozik rá.

6. feladat

Egy elektronikus levelezőtársaságnak 2004 tagja van. Közülük néhányan személyesen is ismerik egymást (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsa be, hogy a 2004 tag két csoportba osztható úgy, hogy a csoportokon belüli személyes ismeretségek számának összege nem több, mint a két csoport tagjai közötti ismeretségek száma! 15 pont

Megoldás: Osszuk el a 2004 tagot két tetszőleges csoportra, amelyek egyike sem üres. Ezután végezzük el a következő eljárást annyiszor, ahányszor csak lehetséges.

Keressünk (bármelyik csoportban) egy tagot, akinek több ismerőse van a saját csoportjában, mint a másikban.

Ha ilyen tagot nem találunk, akkor a kívánt két csoportra való osztással készen vagyunk. 2 pont

Ha ilyen tagot találunk, akkor őt helyezzük át a másik csoportba. Ezeket a cseréket mindaddig ismételjük, amíg találunk valamelyik csoportban olyan személyt, akinek a saját csoportjában több ismerőse van, mint a másikban. 2 pont

Az eljárásról a következő megállapításokat tehetjük:

a) az ismeretségek összes száma az eljárás közben nem változik;

b) egy cserénél a saját csoportbeli ismeretségek száma pozitív egész számmal csökken, a csoportok közötti ismeretségek száma pedig ugyanannyival nő;

c) az eljárásban végrehajtható cserék száma véges, azaz egy idő után biztosan nem lehet több cserét megvalósítani, hiszen a saját csoporton belüli ismeretségek száma minden cserével csökken, és 0-nál kisebb nem lehet. 3 pont

Az eljárás végeztével számoljuk össze minden tag esetén, hogy hány embert ismer a saját és hányat a másik csoportból.

Jelölje S a saját csoportbeli ismeretségek számának összegét, S_i az i-edik ember ($1 \le i \le$ ≤ 2004) saját csoportbeli ismeretségeinek számát, M a másik csoportbeli ismeretségek számának összegét, végül M_i az i-edik ember másik csoportbeli ismeretségeinek számát!

Nyilvánvaló az eljárás jellege miatt, hogy

(1) $$S_i \leq M_i \qquad \text{minden } i\text{-re } (1 \leq i \leq 2004),$$

hiszen bármely tag saját csoportbeli ismeretségeinek száma nem lehet nagyobb, mint a másik csoportbeli ismeretségeinek száma, ellenkező esetben az eljárás során másik csoportba került volna. 3 pont

Ha összeadjuk a saját csoportbeli ismeretségeket és a másik csoportbeli ismeretségeket, akkor (1) alapján

(2) $$S_1 + S_2 + \ldots + S_{2004} \leq M_1 + M_2 + \ldots + M_{2004}.$$ 2 pont

Könnyen látható, hogy (2) bal oldalán S kétszerese, jobb oldalán M kétszerese áll, azaz

(3) $$2 \cdot S \leq 2 \cdot M.$$

(3)-ból pedig

(4) $$S \leq M$$

következik, ez éppen a bizonyítandó állítás. 3 pont

Összesen: 15 pont

Megjegyzés: a bizonyításban nem játszik szerepet, hogy 2004 tagról van szó, ezért a feladat állítása tetszőleges létszám esetén igaz.

A dolgozat összpontszáma: 70 pont

A továbbküldés határa: 20 pont