OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

A 2004-2005. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (x, y, z valós számok):

(1) $$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10,$$

(2) $$x^2-y^2-z^2=476,$$

(3) $$2^{(\lg|y|-\lg z)}=1.$$

Megoldás: Az értelmezési tartományokat vizsgálva (1) miatt $x+y\geq 0$ és $x-y\geq 0$, (3) miatt $y\neq 0$ és $z>0$.

(3) pontosan akkor teljesül, ha $\lg|y|-\lg z=0$, azaz $|y|=z$.

Ekkor (2)-ben z^2 helyett írhatunk y^2-et:

$$x^2-2y^2=476,$$

átrendezve

(4) $$y^2=\frac{x^2-476}{2}.$$

Emeljük négyzetre az (1)-es egyenlet mindkét oldalát:

$$2x+2\sqrt{x^2-y^2}=100.$$

Ebbe (4)-et beírva:

$$2x+2\sqrt{\frac{x^2}{2}+238}=100,$$

(5) $$\sqrt{\frac{x^2}{2}+238}=50-x.$$

(5) bal oldala pozitív, így $x<50$ adódik. Négyzetre emeléssel és rendezéssel (5)-ből kapjuk:

$$x^2-200x+4524=0.$$

Ennek megoldásai a 174 és a 26. A 174 nem lehet jó, mert 50-nél nagyobb. Így $x=26$, (4)-ből $y_1=10$, $y_2=-10$ és $z=10$.

A feladatnak tehát két megoldása van: $(26; 10; 10)$ és $(26; -10; 10)$.

Mindkét értékhármas valóban kielégíti az egyenletrendszer mindhárom egyenletét.

Összesen: 7 pont

2. feladat

Az ABC háromszög BC oldalán van a B_1 és C_1, AB oldalán a B_2, AC oldalán a C_2 pont. B_1B_2 párhuzamos AC-vel, C_1C_2 párhuzamos AB-vel. A B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek metszéspontja D. Jelölje a BB_1B_2 és CC_1C_2 háromszögek területét T_B és T_C.

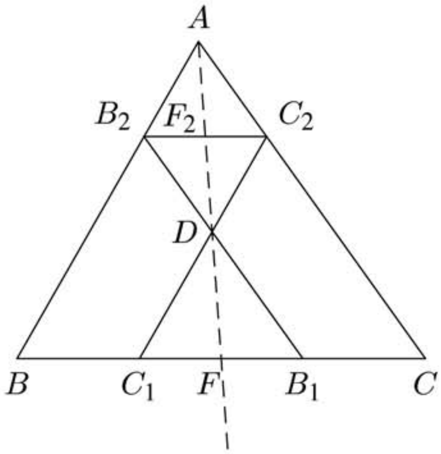
a) Igazoljuk, hogy ha $T_B = T_C$, akkor az ABC háromszög súlypontja rajta van az AD egyenesen.

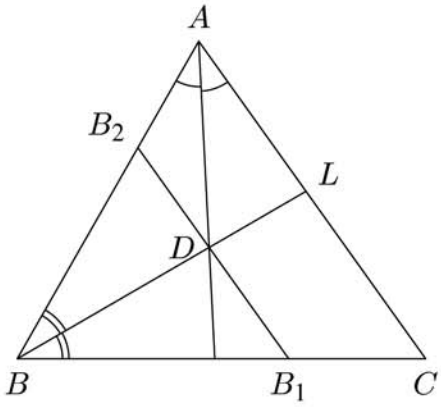
b) Határozzuk meg $\dfrac{T_B}{T_C}$ értékét, ha D az ABC háromszög beírt körének középpontja és $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$.

Megoldás: *a)* Legyen BC és B_2C_2 felezőpontja rendre F és F_2. AB_2DC_2 paralelogramma, átlói felezik egymást, így AD áthalad F_2 ponton.

BB_1B_2 és CC_1C_2 háromszögek oldalai párhuzamosak, tehát hasonlók. Mivel $T_B = T_C$, ezért BB_1B_2 és CC_1C_2 egybevágók. Ezek szerint e két háromszög B_2-höz és C_2-höz tartozó magassága ugyanakkora, így B_2C_2 és BC párhuzamosak.

Ekkor egy A középpontú hasonlóság B_2C_2-t BC-be, F_2-t F-be viszi. Ezért A, F_2, F egy egyenesen vannak, ez az ABC háromszög A-hoz tartozó súlyvonala, amelyen D is és a súlypont is rajta van.





b) Legyen az ABC háromszög területe T. Mivel D a beírt kör középpontja, ezért AD és BD az ABC háromszög szögfelezői. BD egyenes az AC oldalt L-ben metszi. A szögfelező-tétel szerint $AL : LC = AB : BC$, és ezért

$$AL = \frac{AB}{AB+BC} \cdot AC = \frac{4}{4+5} \cdot 6 = \frac{8}{3}.$$

Az ABL háromszögben AD szögfelező, alkalmazva a szögfelező-tételt:

$$\frac{BD}{DL} = \frac{AB}{AL} = 4 : \frac{8}{3} = \frac{3}{2}, \quad \text{és így} \quad \frac{BD}{BL} = \frac{3}{5}.$$

ABC és BB_1B_2 B-re nézve középpontosan hasonló, ennek aránya $\dfrac{BD}{BL} = \dfrac{3}{5}$. A területek aránya a hasonlósági arány négyzete, így $T_B : T = \frac{9}{25}$. Ugyanilyen gondolatmenettel $T_C : T = \left(\frac{11}{15}\right)^2$, és így $T_B : T_C = 81 : 121$.

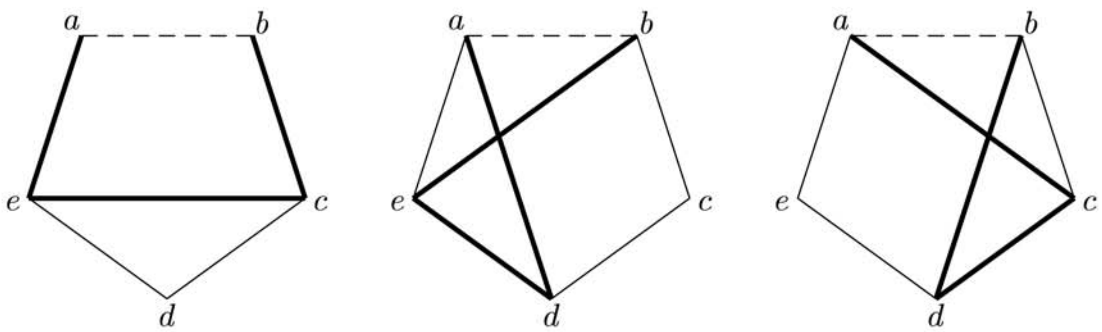
Összesen: 7 pont

3. feladat

Egy szabályos ötszög csúcsaiba egy-egy valós számot írtunk, majd az ötszög oldalaira és átlóira felírtuk a végpontoknál levő számok összegét.

Bizonyítsuk be, hogy ha az utóbbi 10 számból 7 egész, akkor mindegyik egész kell legyen.

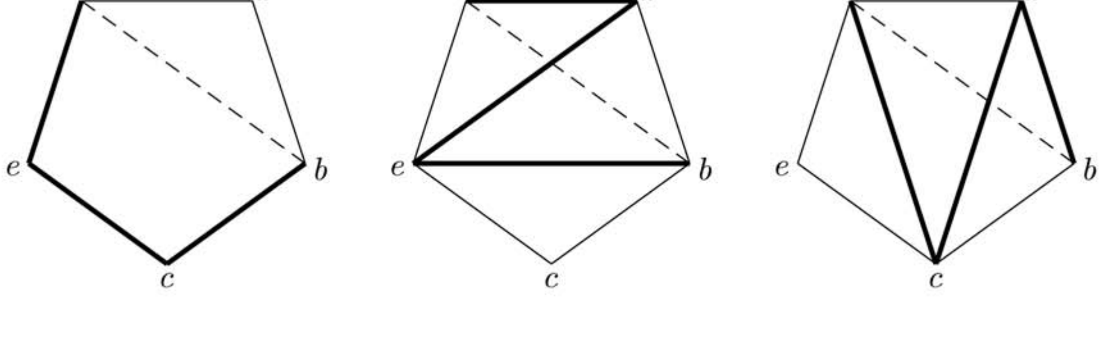
Megoldás: Jelölje az ötszög csúcsainál álló számokat a, b, c, d, e. Ha az $a+b$ összegről nem ismert, hogy egész-e, akkor tekintsük a következő ábrákat ($a+b$ az ötszög egyik oldalán van):



A megvastagított 9 élre írt számok közül kettő lehet olyan, amelyről nem tudjuk, hogy egész-e.

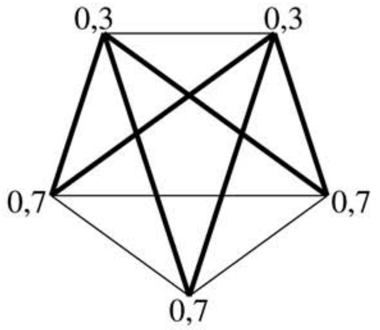
Így valamelyik ábrán mindhárom élen egész szám van. Ha ez az első, akkor $(a+e) - (e+c) + (c+b) = a+b$ bal oldala egész, így a jobb oldala is az. Ugyanígy a másik két ábrán.

Amennyiben az ismeretlen összegű él az ötszög egy átlója, akkor az előbbi indoklás pontosan ugyanúgy működik, ábráink pedig:



Megjegyzések. 1. Belátható, hogy a feladat feltételei csak akkor teljesülnek, ha az ötszög minden csúcsához egész számot írtunk, vagy ha mind az öt szám törtrésze $\frac{1}{2}$.

2. Az élek számánál a 7 *éles korlát*, 6 egész összegű élnél tekinthetjük a következő ábrát, ahol a vastag élekre egészeket írunk, a vékonyakra nem.



3. A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy bebizonyítjuk: lesz a gráfban egész összegű élek által alkotott háromszög. (Mivel $2 \cdot 3 < 7$, ez a Turán-tételből azonnal következik.) Innen kapjuk az 1. megjegyzés eredményét.

Összesen: 7 pont

4. feladat

Okos Ottó felsorolta az n természetes szám pozitív osztóit nagyság szerinti sorrendben. Elsőként az 1-et, majd sorban egymás után, végül nyolcadikként következett az n. A hatodikként felsorolt d osztóról tudjuk, hogy $20 \le d \le 25$. Mi lehetett n?

Megoldás: Ha n törzstényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, akkor osztóinak száma $(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_s+1)$. Ez az érték háromféleképpen lehet 8:

$8 = (7+1) = (3+1) \cdot (1+1) = (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)$, azaz $n = p_1^7$ vagy $p_1^3 p_2$ vagy $p_1 p_2 p_3$.

i) Ha $n = p_1^7$, akkor a hatodik osztó $d = p_1^5$. Mivel $20 \le p_1^5 \le 25$ egyetlen prím esetén sem teljesül, ezért ilyen megoldás nincs.

ii) Ha $n = p_1^3 p_2$, akkor az 1, p_1, p_1^2 osztóknál nagyobb a $p_1^2 p_2$, a p_1^3 és az n; a p_2-nél nagyobb a $p_1 p_2$, a $p_1^2 p_2$ és az n. Így d értéke p_1^3, $p_1 p_2$ és $p_1^2 p_2$ lehet.

$20 \le p_1^3 \le 25$ egyetlen prím esetén sem teljesül, ilyen megoldás nincs.

Ha $d = p_1 p_2$, akkor $p_1 p_2$-nél nagyobb a $p_1^2 p_2$ és az n, $p_1 p_2$ csak akkor hatodik, ha $p_1^3 < < p_1 p_2$, azaz $p_1^2 < p_2$. $20 \le p_1 p_2 \le 25$ két esetben lehet. Ha $d = 21 = 3 \cdot 7$, akkor $3^2 > 7$ és $7^2 > 3$, innen nem kapunk megoldást. Ha $d = 22 = 2 \cdot 11$, akkor $11^2 > 2$, viszont $2^2 < 11$, így n lehetséges értéke $2^3 \cdot 11$.

Ha $d = p_1^2 p_2$, akkor nála nagyobb két osztó csak p_1^3 és n lehet. $p_1^2 p_2 < p_1^3$, tehát $p_2 < < p_1$. $20 \le p_1^2 p_2 \le 25$ egyetlen megoldása $d = 20 = 2^2 \cdot 5$, de $5 > 2$ miatt innen nem kapunk megoldást.

iii) Ha $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, akkor legyen $p_1 < p_2 < p_3$. Ekkor 1, p_1, p_2, p_3, p_1p_2 kisebb a p_1p_3-nál, p_2p_3 és n nagyobb, így $d = p_1p_3$. Ha $d = 3 \cdot 7$, akkor p_2 csak 5 lehet, így $n = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ha $d = 2 \cdot 11$, akkor p_2 lehet 3, 5 vagy 7.

Az n szám lehetséges értékei tehát:

$2^3 \cdot 11 = 88$; $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$; $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$; $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$; $2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$.

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. d értékei szerint sorban haladva gondolkodhatunk így is: d osztópárja a sorban a 3. osztó. Például $d = 20$ esetén az első kettő az 1 és a 2. Mivel $4 \mid 20$, ezért a 3. vagy a 3, vagy a 4. Viszont $3 \cdot 20$ és $4 \cdot 20$ egyikének sem 8 az osztóinak száma, tehát $d = 20$ nem lehet.