A 2004/2005. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának feladatmegoldásai MATEMATIKÁBÓL (I. kategória)

1. feladat Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 x$$

Megoldás: A logaritmus értelmezése miatt $x \rangle 0$.

A logaritmus azonosságainak alkalmazásával a kiinduló egyenlet más alakba is írható:

$$(\log_3 3 - \log_3 x) \cdot \log_2 x - (\log_3 x^3 - \log_3 \sqrt{3}) = \frac{1}{2} + \log_2 x,$$

illetve

(1) $$(1 - \log_3 x) \cdot \log_2 x - (3 \cdot \log_3 x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \log_2 x.$$

A műveletek elvégzése és rendezés után:

(2) $$3 \cdot \log_3 x + \log_3 x \cdot \log_2 x = 0.$$

(2) bal oldala szorzattá alakítható:

(3) $$\log_3 x \cdot (3 + \log_2 x) = 0.$$

Ez akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.
Ha

$$\log_3 x = 0,$$

akkor

$$x_1 = 1.$$

Ha pedig

$$3 + \log_2 x = 0,$$

akkor

$$\log_2 x = -3,$$

innen

$$x_2 = \frac{1}{8}.$$

Mind $x_1 \rangle 0$, mind $x_2 \rangle 0$, és behelyettesítve látjuk, hogy kielégítik az egyenletet.
Tehát mindkettő megoldása a feladatnak.

Összesen: 8 pont

2. feladat Melyek azok az x, y racionális számokból álló számpárok, amelyekre teljesül, hogy

$$4x - y = \frac{625}{y^2} \quad \text{és} \quad x - 4y = \frac{625}{x^2} \ ?$$

Megoldás: A kiinduló egyenletekből következik, hogy sem x, sem y nem lehet 0, továbbá az is, hogy

(1) $$4xy^2 - y^3 = 625 \quad \text{és} \quad x^3 - 4yx^2 = 625.$$

Az (1) összefüggések miatt

(2) $$4xy^2 + 4x^2y - (x^3 + y^3) = 0.$$

(2) bal oldalát szorzattá alakítjuk:

(3) $$(x + y) \cdot (5xy - x^2 - y^2) = 0.$$

Ez akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.
Ha

$$x + y = 0,$$

akkor

$$y = -x,$$

innen pedig valamelyik eredeti egyenletbe helyettesítve az

$$5x = \frac{625}{x^2},$$

majd az

(4) $$x^3 = 125$$

egyenlethez jutunk.

(4) megoldása

$$x = 5,$$

ezért

$$y = -5$$

következik.

Ellenőrizve látjuk, hogy az $x = 5$ és $y = -5$ racionális számok, és mindkét kiinduló egyenletet kielégítik, ezért megoldásai a feladatnak.

Ha (3)-ból $5xy - x^2 - y^2 = 0$, akkor y^2 nem egyenlő 0-val osztva

(5) $$5.\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}-1=0$$

egyenletre jutunk.

Az $\frac{x}{y}=a$ jelöléssel az (5) egyenlet

(6) $$a^2-5a+1=0.$$

(6) megoldásai: $a_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ és $a_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

A kapott a_1, a_2 számok irracionálisak, de ha x, y racionális, akkor hányadosuk is racionális lenne. Ezért a_1 és a_2 a feladatnak nem megoldásai.

Tehát a racionális számokból álló számpárok halmazán az egyenletrendszernek csak az

$$x=5,\ y=-5$$

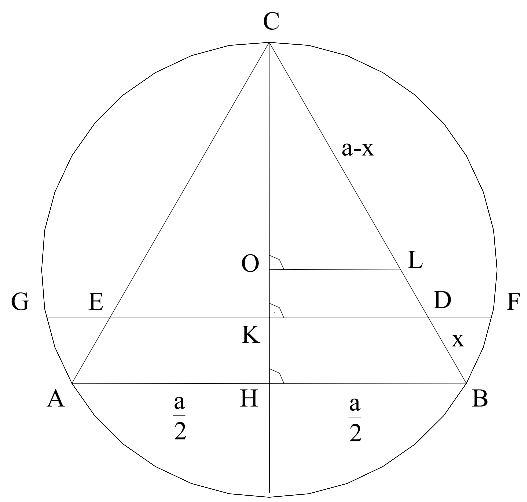
számpár a megoldása.

Összesen: 8 pont

3. feladat Egy körbe beírtunk egy szabályos háromszöget. Egyik oldalával párhuzamosan olyan szelőt húztunk, mely metszi a háromszög másik két oldalát és a kapott húr $\frac{5}{7}$-ed része van a háromszögön belül. Tudjuk még azt is, hogy mind a háromszög oldala, mind a húr háromszögön belüli és azon kívüli darabjainak mérőszáma egész szám.

a) Mekkora a legkisebb ilyen háromszög oldala?
b) Milyen távol van ez a húr a kör középpontjától?

Megoldás: Jelöléseink az ábrán láthatók.



Jelöljük a GF húr hosszúságát h-val!

A feltétel miatt

(1) $$ED = \frac{5}{7}h .$$

A GE és a DF szakaszok a CH egyenesre nézve szimmetrikusan helyezkednek el, tehát (1)-ből következően:

(2) $$GE = DF = \frac{1}{7}h .$$

A D ponton átmenő húrok darabjainak szorzata állandó, ezért (1) és (2) felhasználásával:

(3) $$x \cdot (a - x) = \frac{1}{7}h \cdot \frac{6}{7}h .$$

Ugyanakkor a CED háromszög szabályos háromszög, amiből

(4) $$a - x = \frac{5}{7}h$$

következik.

Ezt beírva (3)-ba:

(5) $$x = \frac{6}{35}h .$$

(4)-ből és (5)-ből

(6) $$a = \frac{31}{35}h .$$

A feltétel szerint a háromszög a-val jelölt oldala egész szám. (6)-ból láthatóan a legkisebb ilyen egész számot akkor kapjuk, ha h a 35 legkisebb egész számú többszöröse, azaz $h = 35$.

Ekkor $a = 31$, és $ED = 25$, valamint DF=6 is egészek, tehát a feladatnak megfelelnek.

Ezután kiszámítjuk az $OK = d$ távolságot.

Tudjuk, hogy O az ABC háromszög súlypontja, ezért $\frac{OC}{HC} = \frac{2}{3}$.

Az OLC és HBC háromszögek hasonlók, így $\frac{OC}{HC} = \frac{OL}{HB} = \frac{2}{3}$.

Mivel $AB=31$, ezért $HB = \frac{31}{2}$.

Az utóbbiak miatt

$$OL = \frac{31}{3}.$$

Az ABC háromszög körülírt körének sugarát R -rel jelölve és felírva az egymáshoz hasonló KDC, valamint OLC háromszögek oldalainak arányát:

$$\frac{R+OK}{R} = \frac{KD}{OL}.$$

Ebbe behelyettesítve az ismert KD és OL értékeket kapjuk, hogy:

$$\frac{R+OK}{R} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{31}{3}} = \frac{75}{62}.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{OK}{R} = \frac{13}{62},$$

innen pedig

$$OK = R \cdot \frac{13}{62}.$$

Mivel

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3},$$

ezért

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{2} \cdot \sqrt{3},$$

azaz

$$OK = \frac{31 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{13}{62},$$

ahonnan a középpont és a húr távolsága

$$d = OK = \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{6}.$$

Összesen: <u>10 pont</u>

4. feladat Az (a_n) sorozatban $a_{n+1} = 4 \cdot a_n - a_n^{\ 2}$.
Milyen a_1 egész szám esetén lesz a sorozat egy bizonyos tagtól kezdve állandó?

Megoldás: A sorozat tagjaira vonatkozó feltétel miatt tudjuk, hogy ha a sorozat első tagja egész szám, akkor minden további tagja is egész szám.

Ha van olyan n amelyre a_n negatív egész szám, akkor a_{n+1} is negatív egész szám, és az is nyilvánvaló, hogy

$$a_{n+1} \langle \ a_n .$$

Ezekből következően negatív egész a_1 esetén a sorozat monoton csökkenő, ezért nem állandó.

Ha valamilyen n-re a_n 4-nél nagyobb egész szám, akkor a feltétel miatt a_{n+1} ismét negatív egész, vagyis 4-nél nagyobb a_1 egész számra a sorozat ismét monoton csökkenő, azaz nem állandó.

A fentiek miatt az a_1 csak a 0, 1, 2, 3 és 4 számok valamelyike lehet.

Ezek a számok mind megfelelnek a feladat követelményeinek, mert:

$a_1 = 0$ esetén nyilvánvaló, hogy a sorozat minden tagja 0;

$a_1 = 1$ esetén a második tagtól kezdve a sorozat minden tagja 3-mal egyenlő;

$a_1 = 2$ esetén a harmadik tagtól kezdve a sorozat minden tagja 0-val egyenlő (az első két tag 2 illetve 4);

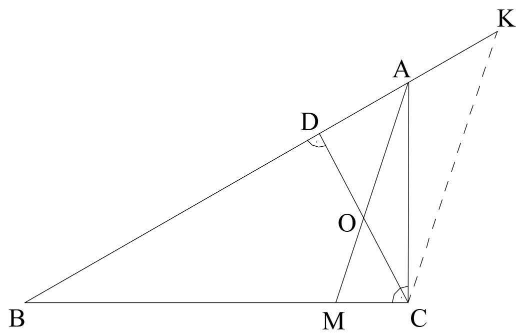
$a_1 = 3$ esetén a sorozat minden tagja 3-mal egyenlő;

$a_1 = 4$ esetén a második tagtól kezdve a sorozat minden tagja 0.

Összesen: 12 pont

5. feladat Az ABC derékszögű háromszögben a C csúcsból az AB átfogóra rajzolt magasságvonal az AB átfogót a D pontban metszi.
A CD szakasz felezőpontja O, az A pontot az O-val összekötő egyenesnek a BC-vel való közös pontja M.
Mutassa meg, hogy $\frac{CM}{MB} = \cos^2 \alpha$, ahol α a háromszög A csúcsánál levő belső szöget jelenti!

<u>Megoldás:</u> Jelöléseink az ábrán láthatóak.



Az ábrán párhuzamost húztunk a C ponton keresztül az AM szakasszal, ez az egyenes az AB egyenesét a K pontban metszette.

A DO és a CO szakaszok hosszának egyenlőségéből, és AM, illetve CK párhuzamosságából következik, hogy $AD = KA$, mivel OA középvonala a DCK háromszögnek.

Írjuk föl a párhuzamos szelők tételét az ABC háromszög B csúcsánál levő belső szögre:

(1) $$\frac{CM}{MB} = \frac{KA}{AB}.$$

Mivel $AD = KA$, ezért (1) helyett írható, hogy:

(2) $$\frac{CM}{MB} = \frac{AD}{AB}.$$

A (2) összefüggés jobb oldalát bővítjük AB-vel:

(3) $$\frac{CM}{MB} = \frac{AD \cdot AB}{AB^2}.$$

Az ABC háromszög AC befogójára felírt befogótétel szerint:

(4) $$AC^2 = AD \cdot AB.$$

A (3) és (4) összefüggések együttesen azt jelentik, hogy:

(5)
$$\frac{CM}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

Viszont az *ABC* háromszögből
$$\frac{AC}{AB} = \cos\alpha ,$$
ezért (5) szerint
$$\frac{CM}{MB} = \cos^2 \alpha ,$$
és ez az amit bizonyítani akartunk.

Összesen: 12 pont