A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, szakközépiskola)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. Aladár összeadta a pozitív egész számokat 1-től n-ig, és eredményül 2020-at kapott. Ezután rájött, hogy a számolása hibás, mert az összeadásnál valamelyik számot kihagyta. Meddig adta össze a számokat Aladár, és melyiket hagyta ki?

Megoldás:

Legyen k az a pozitív egész szám, amelyiket Aladár kihagyta az összeadás során.
Az összeadást felírva az

(1) $$1+2+\cdots+n=2020+k$$ 1 pont

egyenletet kapjuk, ahol

(2) $$1 \leq k \leq n.$$ 1 pont

Az (1) egyenlet bal oldalát írjuk fel zárt alakban, amely után az

$$\frac{n(n+1)}{2}=2020+k$$ 2 pont

egyenlethez jutunk. Átalakítás után k-ra rendezve az

(3) $$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-2020=k$$ 1 pont

egyenletet kapjuk.

A (2) alapján a következő egyenlőtlenségrendszerhez jutunk:

$$1 \leq \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-2020 \leq n.$$ 1 pont

Az első egyenlőtlenség nullára rendezve:

$$0 \leq \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-2021.$$

Az egyenlőtlenség megoldása $n \geq 64$, ahol n pozitív egész szám. 1 pont

A második egyenlőtlenség nullára rendezve:

$$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-2020 \leq 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása $1 \leq n \leq 64$, ahol n pozitív egész szám. 1 pont

A fentiek alapján az egyenlőtlenségrendszer egyetlen megoldása $n=64$.

Ezt visszahelyettesítve a (3) egyenletbe $k=60$. 1 pont

Tehát Aladár a számokat 1-től 64-ig adta össze, és a 60-as számot hagyta ki.

Ellenőrizve $(1+2+\cdots+64)-60=65\cdot 32-60=2080-60=2020.$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Számítsa ki a p és r valós paraméterek értékét, ha a $px - 6y = 12$ egyenletű egyenes merőleges az $5x + ry = 7$ egyenletű egyenesre, és a két egyenesnek az abszcisszatengellyel való metszéspontjai egységnyi hosszúságú szakaszt határoznak meg. A kapott paraméterek segítségével írja fel az egyenesek egyenletét.

Megoldás:

A feladatban szereplő egyenesek egyike sem lehet párhuzamos a derékszögű koordinátarendszer tengelyeivel. Ellenkező esetben nem teljesülne a feladat azon feltétele, hogy a két egyenesnek az abszcisszatengellyel való metszéspontjai egy egységnyi hosszúságú szakaszt határoznak meg. Ebből az is következik, hogy $p \neq 0$ és $r \neq 0$. 1 pont

Átalakítjuk a két egyenes egyenletét:

(1) $$e: y = \frac{p}{6}x - 2, \qquad f: y = -\frac{5}{r}x + \frac{7}{r}.$$ 1 pont

A feltétel szerint a két egyenes merőleges egymásra, ezért meredekségük szorzatára teljesül, hogy

$$\frac{p}{6} \cdot \left(-\frac{5}{r}\right) = -1\,,$$ 2 pont

azaz

(2) $$5p = 6r.$$ 1 pont

Legyenek e és f egyeneseknek az abszcisszatengellyel való metszéspontjai rendre E és F. Ezen pontok második koordinátája nulla, ezért (1) alapján kiszámíthatjuk mindkét pont első koordinátáját. Eszerint

$$e: \frac{p}{6}x - 2 = 0; \qquad f: -\frac{5}{r}x + \frac{7}{r} = 0,$$

ahonnan egyszerű számolással adódik, hogy

$$E\left(\frac{12}{p}; 0\right); \qquad F\left(\frac{7}{5}; 0\right).$$ 1 pont

A feladat feltétele miatt $EF = 1$, ezért

(3) $$\left|\frac{12}{p} - \frac{7}{5}\right| = 1\,.$$ 2 pont

A (3) egyenlet kétféleképpen állhat fenn:

$$\frac{12}{p} - \frac{7}{5} = 1$$

vagy

$$\frac{12}{p} - \frac{7}{5} = -1\,.$$

A kapott egyenletekből p értékét kiszámítva, (2) felhasználásával r értékét is megadhatjuk. Egyszerű számolás után a kapott paraméterek értékei:

$$p_1 = 5;\ r_1 = \frac{25}{6}; \qquad p_2 = 30;\ r_2 = 25\,.$$ 1 pont

Az e és f egyenesek egyenlete az első megoldás szerint

$$e\colon y=\frac{5}{6}x-2; \qquad f\colon y=-\frac{6}{5}x+\frac{42}{25},$$

a második paraméter-párból következően pedig

$$e\colon y=5x-2; \qquad f\colon y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{25}.$$

1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a versenyző a (3) egyenletet abszolútérték-jel nélkül írja fel, és így a $p; r$ paraméterekre csak egy helyes megoldást kap, akkor az utolsó 4 pontból 2 pontot veszítsen.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x^2+x-6}-\sqrt{-x^2+7x-10}=\sqrt{x^2+9x-22}.$$

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségeknek:

(1) $x^2+x-6\geq 0,$

(2) $-x^2+7x-10\geq 0,$

(3) $x^2+9x-22\geq 0.$ 1 pont

Az (1) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő $f(x)=x^2+x-6$ másodfokú függvény zérushelyei $x_{11}=2;\ x_{21}=-3.$

Eszerint az (1) egyenlőtlenség a

$$H_1=]-\infty;-3]\cup[2;\ \infty[$$

számhalmazon állhat fenn. 1 pont

A (2) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő $g(x)=-x^2+7x-10$ másodfokú függvény zérushelyei $x_{12}=2;\ x_{22}=5.$

A $g(x)$ függvény képe lefelé nyíló parabola, ezért a (2) egyenlőtlenség a

$$H_2=[2;5]$$

számhalmazon teljesül. 1 pont

Végül a (3) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő $h(x)=x^2+9x-22$ másodfokú függvény zérushelyei $x_{13}=2;\ x_{23}=-11$, tehát a (3) egyenlőtlenség a

$$H_3=]-\infty;-11]\cup[2;\ \infty[$$

számhalmazban szereplő valós számokra igaz. 1 pont

Az egyenlet megoldásai a $H=H_1\cap H_2\cap H_3$ halmaz elemei lehetnek.

A számegyenesen történő ábrázolással is látható, hogy $H=H_2=[2;5]$, a megoldást ezen a halmazon kereshetjük. 1 pont

A fentiek alapján a kiinduló egyenlet így is írható:

(4) $\sqrt{(x-2)\cdot(x+3)}-\sqrt{(x-2)\cdot(-x+5)}=\sqrt{(x-2)\cdot(x+11)}\,.$

Tudjuk, hogy $x=2$ eleme a H halmaznak, és a (4) egyenletből láthatjuk, hogy ez a szám kielégíti az egyenletet, tehát $x=2$ a feladat megoldása. 2 pont

Ha most $x\neq 2$, akkor a (4) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a $\sqrt{x-2}$ pozitív kifejezéssel, ebből azt kapjuk, hogy

(5) $\sqrt{x+3}-\sqrt{-x+5}=\sqrt{x+11}\,.$

Az (5) egyenletet átrendezéssel és négyzetre emeléssel az

(6) $x-13=2\cdot\sqrt{(-x+5)\cdot(x+11)}$

alakra hozhatjuk. 1 pont

A (6) egyenletben a négyzetgyök értelmezése miatt $x\geq 13$, ez az eredmény azonban ellentmond annak, hogy feladat megoldása csak a $H=[2;5]$ halmaz eleme lehet. 1 pont

Ezért a (6) egyenletnek nincs a feltételeknek megfelelő valós megoldása.

A feladat egyetlen megoldása tehát az $x = 2$ valós szám, a megoldás helyességéről az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel meggyőződhetünk. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a versenyző eljut az (5) illetve (6) egyenlethez, akkor innen további négyzetre emeléssel megkaphatja az $5x^2 - 2x - 51 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $x_1 = 3{,}4$ és $x_2 = -3$. Amennyiben a kapott számokat ellenőrzés nélkül a feladat megoldásainak tekinti, illetve nem veszi figyelembe az $x \in H$ feltételt, akkor az utolsó két pontot veszítse el.

4. Zsuzsi egy szabályos dobókockával ötször dobott egymás után, majd a dobott számokat felírta egy papírlapra. Ezután a számok különbségeinek abszolútértékeit egy másik lapra írta. Ezen a lapon tehát 10 szám szerepel. Mennyi a valószínűsége, hogy a második papírlapra felírt számok között több páros szám van, mint páratlan?

Megoldás:

Elegendő a dobások paritását vizsgálni. Eszerint Zsuzsi az első lapra felírhat:

(1) 1-féleképp 5 páros számot,

(2) 5-féleképp 4 páros és 1 páratlan számot,

(3) 10-féleképp 3 páros és 2 páratlan számot,

(4) 10-féleképp 2 páros és 3 páratlan számot,

(5) 5-féleképp 1 páros és 4 páratlan számot,

(6) 1-féleképp 5 páratlan számot. 2 pont

Ez összesen 32 lehetőség (összes eset). 1 pont

Használjuk fel, hogy azonos paritású számok különbsége páros, különbözőké páratlan, és vizsgáljuk a második lapra írt számokat: 1 pont

Az (1) és a (6) esetben 10 darab páros szám kerül a lapra. 1 pont

A (2) és a (5) esetben 6 darab páros szám és 4 db páratlan kerül a lapra. 1 pont

A (3) és a (4) esetben 4 darab páros szám és 6 db páratlan kerül a lapra. 1 pont

A kedvező esetek számát az (1), (2), (5) és (6) eset adja, ami összesen

$1 + 5 + 5 + 1 = 12$ eset. 1 pont

A klasszikus valószínűségi modell alapján annak a valószínűsége, hogy a második lapon több páros szám szerepel, mint páratlan:

$$P = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

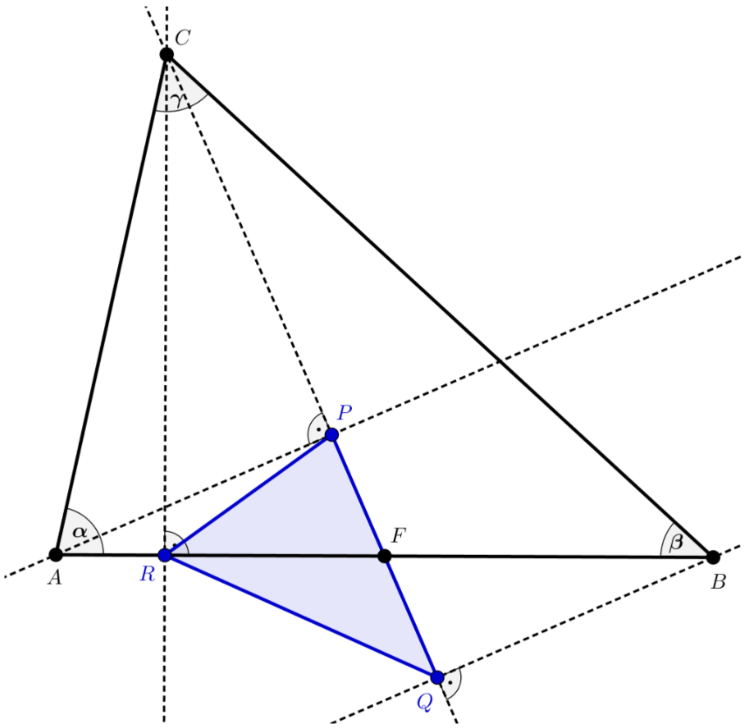
5. Legyen az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög súlypontja S. A C pontból az AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja R, az $A; B$ pontokból a CS egyenesre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre $P; Q$.

   a) Bizonyítsa be, hogy a PQR háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

   b) Adja meg a PQ szakasz hosszának pontos értékét, ha $BC = 65;\ CA = 45;\ AB = 50$.

Megoldás:

A feladat a) részének megoldásához vázlatos ábrát készítünk, amelyen az AB oldal felezőpontját F-fel jelöljük, az ABC háromszög belső szögeire pedig a szokásos $CAB\sphericalangle = \alpha; ABC\sphericalangle = \beta; BCA = \gamma$ jelöléseket alkalmazzuk. Mivel a feltétel szerint az ABC háromszög hegyesszögű, de nem egyenlő szárú, ezért az R pont az AF; BF szakaszok valamelyikének belső pontja. Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az R pont az AF szakasz belső pontja. 1 pont



1. ábra

A P és R pontok nem lehetnek azonosak, mert a feltételek miatt a CF és CR szakaszoknak egyetlen közös pontja a C, másrészt a P pont a CF szakasz belső pontja. Ugyanakkor a P és R pontok a CA szakasz, mint átmérő fölé írt Thalész-körön vannak. Utóbbi azt jelenti, hogy $CARP$ húrnégyszög, amelynek szemközti szögei 180°-ra egészítik ki egymást, így $CPR\sphericalangle = 180° - \alpha$.

Ebből pedig az következik, hogy $RPQ\sphericalangle = \alpha$. 1 pont

Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy Q és R pontok sem lehetnek azonosak, mert Q pont a CF szakasz külső pontja, valamint azt, hogy Q és R pontok a BC szakasz, mint átmérő fölé írt Thalész-körön vannak, ezért $BCRQ$ húrnégyszög.

A $BCRQ$ húrnégyszög köré írt körben az $RBC\sphericalangle = \beta$ és $RQC\sphericalangle$ azonos ívhez tartozó kerületi szögek, így a kerületi szögek tételéből adódik, hogy $RQC\sphericalangle = RQP\sphericalangle = \beta$. 1 pont

Azt kaptuk tehát, hogy a PQR háromszögben $RPQ\sphericalangle = \alpha$; $RQP\sphericalangle = \beta$, ebből következik, hogy $PRQ\sphericalangle = \gamma$, ez pedig azt jelenti, hogy az ABC és PQR háromszögek hasonlók, hiszen megfelelő szögeik egyenlők. 1 pont

A feladat b) részének megoldásához először bizonyítjuk, hogy a $BC = 65$; $CA = 45$; $AB = 50$ oldalakkal rendelkező háromszög hegyesszögű. Ehhez elég belátni, hogy $CA^2 + AB^2 > BC^2$, ez pedig teljesül, hiszen $45^2 + 50^2 = 4525$, míg $65^2 = 4225$. 1 pont

Mivel $BC > CA$, ezért R pont az 1. ábrának megfelelően az AF szakasz belső pontja. Legyen $RF = x$, ekkor $AR = 25 - x$, hiszen $AB = 50$ miatt $AF = 25$.

Az ACR és FCR derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz-tételekből következik, hogy

$$CF^2 - x^2 = CA^2 - (25 - x)^2,$$

ahonnan $CA = 45$ behelyettesítése és a műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

(1) $$CF^2 - 1400 = 50x.$$ 1 pont

A CF szakasz az ABC háromszögnek C csúcshoz tartozó súlyvonala. Ismeretes, hogy

$$CF^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4},$$

ezzel

$$CF^2 = \frac{2 \cdot 65^2 + 2 \cdot 45^2 - 50^2}{4} = 2500\,,$$

ahonnan $CF = 50$, és (1) alapján $x = 22$ következik. 2 pont

Mivel a feladat a) részében bizonyítottuk, hogy a PQR háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, ezért

$$\frac{PQ}{x} = \frac{50}{CF},$$

amelyből $CF = 50$ és $x = 22$ szerint $PQ = 22$ adódik.

A megadott feltételeknek megfelelően tehát a PQ szakasz hosszának pontos értéke

$$PQ = 22.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A feladat nem követeli meg a PQ szakasz hosszának előállítását az ABC háromszög oldalaival, de bizonyítható, hogy ha a háromszögben a szokásos jelöléseket használjuk, és $a \neq b$, akkor

$$PQ = \frac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}.$$