



Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. A k_1, k_2, k_3 köröknek páronként két metszéspontja van. Bármelyik két kört tekintve, metszéspontjaik közül az egyik a harmadik belsejében, a másik azon kívül van.

(a) Mekkora a körök által kétszeresen fedett terület, ha a körök területeinek összege 3 cm^2 , az általuk összesen lefedett terület 2 cm^2 és a háromszorosan lefedett terület pedig $0,2 \text{ cm}^2$?

(b) A legalább kétszeresen lefedett terület egy síkidom, melyet 6 ív határol. Ezt a hat ívet felváltva pirossal és zölddel színezzük. Igazoljuk, hogy amennyiben a körök sugarai ugyanakkorák, akkor a piros ívek hosszának összege ugyanannyi, mint a zöldeké.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2 \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 10} + x - 2 \cdot \sqrt{x - 2} = 3.$$

3. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyből egyetlen számjegy törlése után a kapott számjegyek összege 19, szorzata pedig 9?

4. Az $ABCD$ négyszög mind a négy csúcsa egy körön helyezkedik el. Tudjuk, hogy $\angle DAB = 135^\circ$, továbbá az AC és BD átlók merőlegesek egymásra. Igazoljuk, hogy az átlók metszéspontja két olyan szakaszra osztja az AC átlót, amelyek hosszának a különbsége megegyezik a másik átló hosszával.

5. Egy sakkversenyen kétszer annyi fiú vett részt, mint ahány lány. Bármely két játékos egy alkalommal játszott egymással és egyetlen játszma sem végződött döntetlennel. Hány lány és hány fiú vett részt a versenyen, ha tudjuk, hogy a lányok és a fiúk nyertes játszmáinak aránya 7:5?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.