A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, szakközépiskola)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. Adja meg a valós számok halmazán értelmezett összes olyan $f(x) = ax + b$ függvényt, amelyre az $a \neq 0$ feltétel mellett teljesül, hogy $f(a) = (a - b)^2$ és $f(b) = 2a + b$.

Megoldás:

Vizsgáljuk az $f(x) = ax + b$ lineáris függvény helyettesítési értékeit $x = a$ és $x = b$ helyeken.

Ha $x = a$, akkor

(1) $$f(a) = a^2 + b,$$

és $x = b$ esetén

(2) $$f(b) = ab + b.$$ 2 pont

A feladat feltételei, illetve (1) és (2) alapján a következő egyenleteket kapjuk:

(3) $$(a - b)^2 = a^2 + b,$$

(4) $$2a + b = ab + b.$$ 2 pont

A (3) egyenlet a műveletek elvégzése és rendezés után

(5) $$b^2 - 2ab - b = 0.$$

A (4) egyenlet rendezés után:

$$2a - ab = 0,$$ 2 pont

illetve a bal oldal szorzattá alakításával:

$$a(2 - b) = 0.$$

A feladat feltétele szerint $a \neq 0$, ezért az egyenletből $b = 2$ következik. 2 pont

Ezt az (5) egyenletbe visszahelyettesítve

$$4 - 4a - 2 = 0,$$

amelyből

$$a = \frac{1}{2}$$

adódik. 1 pont

Az egyenletrendszer megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

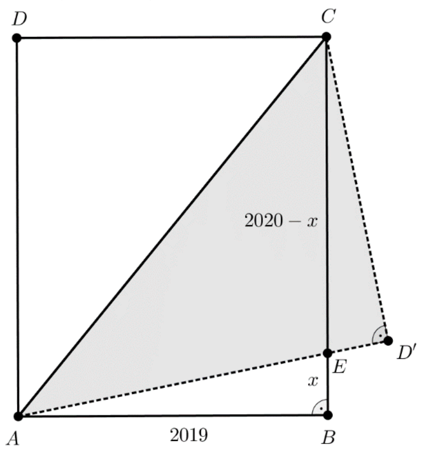
az egyetlen olyan függvény, amelyre a feladat feltételei teljesülnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Egy téglalap alakú papírlap oldalai 2019 és 2020 egység hosszúak. Mekkora az egyik átló mentén történő összehajtással keletkező síkidom területe?

1. megoldás:

Tekintsük a következő ábrát (1. ábra).



1. ábra

Az ábra jelöléseit használva az $ABED'C$ konkáv ötszög területét kell meghatározni, ahol a D' pont a D pont AC átlóra vonatkozó tükörképe. 1 pont

Az $ABE_{\Delta} \cong CD'E_{\Delta}$, mert $CD' = CD = AB$, valamint az $ABE\sphericalangle = CD'E\sphericalangle = 90°$, és az $AEB\sphericalangle = CED'\sphericalangle$, utóbbiak csúcsszögpárt alkotnak. 1 pont

Legyen $EB = ED' = x$, ekkor $AE = EC = 2020 - x$. Felírjuk a Pitagorasz-tételt az ABE_{Δ}-re:

$$2019^2 + x^2 = (2020 - x)^2 .$$

2 pont

A zárójel felbontása és rendezés után

$$4040x = 4039,$$

tehát

$$x = \frac{4039}{4040}.$$

1 pont

Ennek segítségével az ABE_{Δ} területe:

$$T_{ABE\Delta} = \frac{2019 \cdot \frac{4039}{4040}}{2} = \frac{8154741}{8080} \approx 1009{,}25$$

területegység. 2 pont

Az $AD'C_{\Delta} \cong ADC_{\Delta}$, ezért a területe megegyezik a téglalap területének felével, tehát

$$T_{AD'C_{\Delta}} = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = 2039190$$

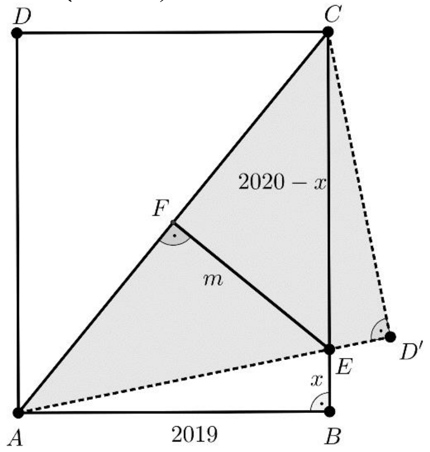
területegység. 2 pont

A keresett konkáv ötszög területét az ABE_Δ és az $AD'C_\Delta$ területének összegeként kapjuk meg, vagyis $1009{,}25 + 2039190 = 2040199{,}25$ területegység. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Tekintsük a következő ábrát (2. ábra).



2. ábra

Az ábra jelöléseit használva az $ABED'C$ konkáv ötszög területét kell meghatározni, ahol a D' pont a D pont AC átlóra vonatkozó tükörképe. 1 pont

Az $ABE_\Delta \cong CD'E_\Delta$, mert $CD' = CD = AB$, illetve $ABE\sphericalangle = CD'E\sphericalangle = 90°$, továbbá $AEB\sphericalangle = CED'\sphericalangle$, mert csúcsszögek. 1 pont

Ekkor AEC_Δ egyenlő szárú, mert $AE = CE$. Legyen F pont az AC szakasz felezőpontja, és $m = EF$ az AEC_Δ magassága. 1 pont

A tükrözés miatt $DAC\sphericalangle = D'AC\sphericalangle$, és AFE_Δ illetve ADC_Δ is derékszögű, ezért az $AFE_\Delta \sim ADC_\Delta$, így a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

(1) $$\frac{m}{AF} = \frac{2019}{2020}.$$

1 pont

Az AF szakasz hossza a téglalap átlójának fele, tehát

$$AF = \frac{\sqrt{2020^2 + 2019^2}}{2},$$

és így az (1) összefüggésből

$$m = \frac{\sqrt{2020^2 + 2019^2}}{2} \cdot \frac{2019}{2020}.$$

2 pont

Az ötszög területét megkapjuk, ha az ABC_Δ területéhez hozzáadjuk az $AD'C_\Delta$ területét és levonjuk belőle az AEC_Δ területét. 1 pont

Ezért

$$T_{ABC} = T_{AD'C} = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = 2039190$$

területegység,

$$T_{AEC} = \frac{AC \cdot m}{2} = AF \cdot m = \frac{\sqrt{2020^2 + 2019^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2020^2 + 2019^2}}{2} \cdot \frac{2019}{2020} =$$
$$= 2038180{,}75$$

területegység. 2 pont

Így a konkáv ötszög területe $2 \cdot 2039190 - 2038180{,}75 = 2040199{,}25$ területegység. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Legyenek azok a pozitív egész számok „unalmasak”, amelyeknek a tízes szám-rendszerbeli alakja legalább kétjegyű, és a számjegyei szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő sorrendben követik egymást.
    a. Hány háromjegyű, csupa páratlan számjegyekből álló „unalmas” szám van?
    b. Számolja ki az ötjegyű „unalmas” számok összegét.

Megoldás:

a) Azokat az $\overline{abc}$ tízes számrendszerbeli háromjegyű számokat keressük, amelyeknek a számjegyei az $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ halmazból valók, és vagy $a < b < c$ vagy $a > b > c$.

Bárhogyan is választunk ki három különböző elemet az $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ ötelemű halmazból, azok minden esetben csak egyféleképp rendezhetők növekvő és egyféleképp csökkenő sorrendbe. 1 pont

5 elemből 3 különböző elemet $\binom{5}{3} = 10$ féleképp lehet kiválasztani. 1 pont

Tehát $2 \cdot 10 = 20$ darab háromjegyű, csupa páratlan számból álló „unalmas” szám van. 1 pont

b) Azoknak az $\overline{abcde}$ tízes számrendszerbeli ötjegyű számoknak az összegét keressük, amelyekben vagy $0 < a < b < c < d < e \leq 9$ vagy $9 \geq a > b > c > d > e \geq 0$.

Mivel a értéke nem lehet 0, ezért a szigorúan monoton növekvő számjegyekből álló $\overline{abcde}$ ötjegyű számok száma $\binom{9}{5} = 126$.

A szigorúan monoton csökkenő számjegyekből álló $\overline{abcde}$ ötjegyű számok száma $\binom{10}{5} = 252$. 1 pont

Minden „növekvő” számhoz rendeljük hozzá azt a „csökkenő” számot, amely a megfelelő számjegyeket éppen 10-re egészíti ki (pl.:12345 $\mapsto$ 98765). Ezen 126 számpár mindegyikének összege 111110. 1 pont

A maradék 126 „csökkenő” szám összegzését helyiértékenként végezzük el.

Az összegben:

- Minden szám nullára végződik, mivel ezeknek a számoknak nem volt párjuk az előbbi párosításkor.
- A tízes helyiértéken $\binom{8}{3} = 56$ db 1-es, $\binom{7}{3} = 35$ db 2-es, $\binom{6}{3} = 20$ db 3-as, $\binom{5}{3} = 10$ db 4-es, $\binom{4}{3} = 4$ db 5-ös és $\binom{3}{3} = 1$ db 6-os szerepel, így ezek összege: $10 \cdot (56 \cdot 1 + 35 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6) = 2520$.
- A százas helyiértéken $\binom{7}{2} \cdot 1 = 21$ db 2-es, $\binom{6}{2} \cdot 2 = 30$ db 3-as, $\binom{5}{2} \cdot 3 = 30$ db 4-es, $\binom{4}{2} \cdot 4 = 24$ db 5-ös, $\binom{3}{2} \cdot 5 = 15$ db 6-os és $\binom{2}{2} \cdot 6 = 6$ db 7-es szerepel, így ezek összege:
  $10^2 \cdot (21 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 6 \cdot 7) = 50400$.
- Az ezres helyiértéken $6 \cdot \binom{2}{2} = 6$ db 3-as, $5 \cdot \binom{3}{2} = 15$ db 4-es, $4 \cdot \binom{4}{2} = 24$ db 5-ös, $3 \cdot \binom{5}{2} = 30$ db 6-os, $2 \cdot \binom{6}{2} = 30$ db 7-es és $\binom{7}{2} = 21$ db 8-as szerepel, így ezek összege:
  $10^3 \cdot (6 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 30 \cdot 6 + 30 \cdot 7 + 21 \cdot 8) = 756000$.

A tízezres helyiértéken $\binom{3}{3} = 1$ db 4-es, $\binom{4}{3} = 4$ db 5-ös, $\binom{5}{3} = 10$ db 6-os, $\binom{6}{3} = 20$ db 7-es, $\binom{7}{3} = 35$ db 8-as és $\binom{8}{3} = 56$ db 9-es szerepel, így ezek összege: $10^4 \cdot (1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 20 \cdot 7 + 35 \cdot 8 + 56 \cdot 9) = 10080000$.

3 pont

Tehát a maradék 126 darab „csökkenő” szám összege:
$2520 + 50400 + 756000 + 10080000 = 10888920$. 1 pont

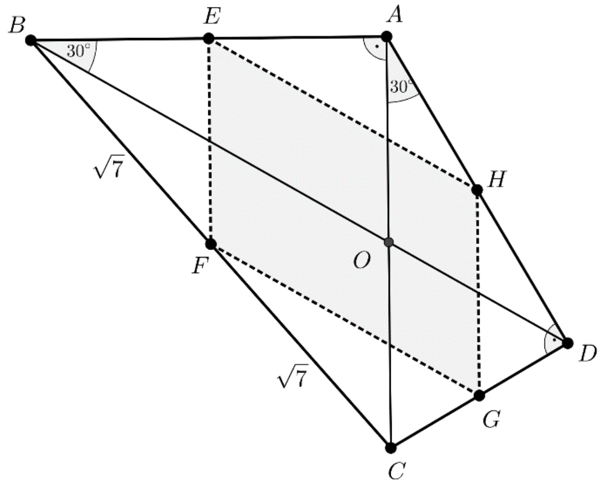
Ehhez hozzáadva a 126 pár szám összegét:
$10888920 + 126 \cdot 111110 = 24888780$ az ötjegyű „unalmas” számok összege. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Az $ABCD$ konvex négyszögben $DBA\sphericalangle = DAC\sphericalangle = 30°$, $ADC\sphericalangle = 90°$ és az AC átló merőleges az AB oldalra. Legyenek AB; BC; CD; DA oldalak felezőpontjai rendre E; F; G; H. Határozza meg az $EFGH$ négyszög oldalainak hosszát és területét, ha a BC oldal hossza $2\sqrt{7}$ cm.

Megoldás:

Tekintsük a következő ábrát (3. ábra).



3. ábra

Az EF szakasz az ACB_Δ középvonala, illetve GH szakasz az ACD_Δ középvonala, ezért EF és GH szakaszok párhuzamosak az AC átlóval, így egymással is, továbbá

$$EF = GH = \frac{AC}{2}.$$

1 pont

A fentiekből következik, hogy $EFGH$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Az AOB_Δ-ben $ABO\sphericalangle = 30°$, és $BAO\sphericalangle = 90°$, emiatt az $AOB\sphericalangle = 60°$, vagyis a háromszög „félszabályos". Legyen $AO = x$, ekkor $AB = x \cdot \sqrt{3}$ és $BO = 2 \cdot x$. 1 pont

Ha $AOB\sphericalangle = 60°$, akkor $AOD\sphericalangle = 120°$, mert mellékszögpárt alkotnak, így $ADO\sphericalangle = 30°$. Ekkor az AOD_Δ egyenlő szárú, tehát $DO = AO = x$.

Az OCD_Δ egyenlő oldalú, mert $COD\sphericalangle$ az $AOC\sphericalangle$ csúcsszögpárja, tehát 60°-os, és $ODC\sphericalangle = 90° - 30° = 60°$, vagyis OCD_Δ minden oldala $CD = OC = DO = x$, tehát $AC = 2x$. 1 pont

Ezután felírjuk az *ABC* derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 .$$

Helyettesítsük be az oldalak helyére a megfelelő változókat

$$\left(\sqrt{3}x\right)^2 + (2x)^2 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 ,$$

majd a zárójelek felbontása és rendezés után

$$x^2 = 4 ,$$

amelyből a pozitív gyök az $x = 2$. 2 pont

Innen az $EFGH$ paralelogramma oldalai

$$EF = GH = \frac{AC}{2} = 2\text{ cm}.$$

Mivel $BD = BO + DO = 3x = 6$ cm, ezért

$$EH = FG = \frac{BD}{2} = 3\text{ cm}.$$

2 pont

Az $FEH\sphericalangle = COD\sphericalangle = 60°$, mert egyállású szögpárt alkotnak, így a paralelogramma területe $EF \cdot EH \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}\text{ cm}^2$. 2 pont

Összesen: 10 pont

5. Oldja meg a valós számhármasok halmazán az

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} = 15; \qquad 2x + 3y = 13$$

egyenletrendszert.

1. megoldás:

Az első egyenlet kezdeti feltétele $z \neq 0$. 1 pont

Ha az első egyenletből kivonjuk a második egyenlet kétszeresét, azt kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} - 4x - 6y = -11\,.$$

2 pont

Teljes négyzetekké rendezzük a megfelelő tagokat

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right) = 0\,,$$

amelyből

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = 0\,.$$

2 pont

A másodfokú tagok összege pontosan akkor nulla, ha minden tagjának értéke egyenként nulla. 1 pont

Az első tag pontosan akkor nulla, ha $x = 2$. 1 pont

A középső tag pontosan akkor nulla, ha $y = 3$. 1 pont

Végül a harmadik tag pontosan akkor nulla, ha $z = \pm 1$. 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenletrendszernek két számhármas tesz eleget, az $x = 2, y = 3, z = -1$ és az $x = 2, y = 3, z = 1$. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Az első egyenlet kezdeti feltétele $z \neq 0$. 1 pont

Mivel

$$z^2 + \frac{1}{z^2} \geq 2$$

tetszőleges $z \neq 0$ értékre, emiatt

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} \geq x^2 + y^2 + 2\,.$$

1 pont

Ezt felhasználva adódik, hogy

$$x^2 + y^2 + 2 \le 15\,,$$

amiből

$$x^2 + y^2 \le 13\,.$$ 1 pont

Ez megfelel egy $\sqrt{13}$ sugarú zárt körlap $(x; y)$ koordinátájú pontjainak.

Keressük ennek a körlapnak és a $2x + 3y = 13$ egyenletű egyenesnek a metszéspontjait.

Kifejezzük az egyenes egyenletéből x-et

$$x = \frac{13 - 3y}{2}\,.$$

1 pont

Behelyettesítve a körlap egyenlőtlenségébe azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{13 - 3y}{2}\right)^2 + y^2 \le 13\,.$$

Az egyenlőtlenség rendezése után, azt kapjuk, hogy

$$y^2 - 6y + 9 \le 0\,,$$ 2 pont

amelynek a megoldása az $y = 3$, hiszen $(y - 3)^2 \le 0$ csak így állhat fenn. 1 pont

Ebből adódik, hogy

$$x = \frac{13 - 9}{2} = 2\,.$$

1 pont

Tehát

$$2^2 + 3^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} = 15\,,$$

vagyis

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = 2\,,$$

amiből . $z^2 = 1$, illetve $z = \pm 1$ következik. 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenletrendszernek két számhármas tesz eleget, mégpedig

$$x = 2, y = 3, z = -1; \qquad x = 2, y = 3, z = 1\,.$$

1 pont

Összesen: 10 pont

3. megoldás:

Az első egyenlet kezdeti feltétele $z \neq 0$. 1 pont

Mivel

$$z^2 + \frac{1}{z^2} \geq 2$$

tetszőleges $z \neq 0$ értékre, emiatt

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} \geq x^2 + y^2 + 2\,.$$

1 pont

Ezt felhasználva adódik, hogy

$$x^2 + y^2 + 2 \leq 15\,,$$

amiből

$$x^2 + y^2 \leq 13\,.$$ 1 pont

Vezessük be az $\vec{u}(2;3)$ és $\vec{v}(x;y)$ vektorokat. Ekkor a két vektor skaláris szorzatára

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2x + 3y = 13\,.$$

Ha a két vektor által bezárt szöget α jelöli, akkor a skaláris szorzat definíciója szerint

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{13} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos\alpha\,.$$

1 pont

A két eredmény összevetése alapján

$$13 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos\alpha\,,$$

amiből $\cos\alpha \leq 1$ miatt következik, hogy

$$13 \leq \sqrt{13} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

és végül (figyelembe véve, hogy mindkét oldal pozitív) négyzetre emelés és egyszerűsítés után adódik, hogy

$$13 \leq x^2 + y^2.$$

Mivel $x^2 + y^2 \leq 13$ is teljesül, ezért

$$x^2 + y^2 = 13.$$ 2 pont

Egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\cos\alpha = 1$, azaz ha a két vektor egymással egyállású. Ekkor $\vec{v}(2\lambda, 3\lambda)$ alakú, és a két vektor skaláris szorzata $4\lambda + 9\lambda = 13$, amiből $\lambda = 1$, így $x = 2$ és $y = 3$. 2 pont

Tehát

$$2^2 + 3^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} = 15\,,$$

vagyis

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = 2\,,$$

amiből . $z^2 = 1$, illetve $z = \pm 1$ következik. 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenletrendszernek két számhármas tesz eleget, mégpedig

$$x = 2, y = 3, z = -1; \qquad x = 2, y = 3, z = 1\,.$$

1 pont

Összesen: 10 pont

6. Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig vannak számozva. Egy bolha a dobókocka 1-es számú lapján pihen. A bolha egy ugrással kizárólag a szomszédos lapok valamelyikére tud ugrani, és azok közül bármelyikre egyforma valószínűséggel. Onnan ismét egy vele szomszédos lapra ugorhat. Mennyi a valószínűsége, hogy öt ugrás után a bolha a kiinduló 1-es számú lapra érkezik vissza?

Megoldás:

Különböztessük meg a lapokat aszerint, hogy ugorhat-e a bolha onnan az 1-es lapra vagy sem. 1 pont

Legyen x típusú a dobókocka 1-es lapja és a szemközti lap. Innen nem ugorhat a bolha az 1-es lapra. 1 pont

Legyen y típusú a dobókocka maradék 4 lapja. Ezek bármelyikéről a bolha az 1-es lapra

$$P(y,1) = \frac{1}{4}$$

valószínűséggel tud ugrani. 1 pont

A bolha x típusú lapról nem ugorhat x típusúra, ezért

$$P(x,x) = 0\,.$$

A bolha x típusú lapról mindig csak y típusúra tud ugrani, ezért

$$P(x,y) = 1\ .$$

1 pont

A bolhának y típusú lapról két lehetősége van x típusúra, és szintén két lehetősége van y típusú lapra ugrani, ezért

$$P(y,x) = P(y,y) = \frac{1}{2}.$$

1 pont

A bolha első ugrással csak y típusú lapra ugorhat, az utolsó ugrásakor pedig csak y típusú lapról ugorhat az 1-es lapra. 1 pont

A bolha kedvező ugrásai a következőképp alakulhatnak:

Kezdő lap (x)	1. ugrás után	2. ugrás után	3. ugrás után	4. ugrás után	5. ugrás után	Valószínűség
1	y	x	y	y	1	P_1
1	y	y	x	y	1	P_2
1	y	y	y	y	1	P_3

$$P_1 = P(1,y)\cdot P(y,x)\cdot P(x,y)\cdot P(y,y)\cdot P(y,1) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

1 pont

$$P_2 = P(1,y)\cdot P(y,y)\cdot P(y,x)\cdot P(x,y)\cdot P(y,1) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

1 pont

$$P_3 = P(1,y)\cdot P(y,y)\cdot P(y,y)\cdot P(y,y)\cdot P(y,1) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32}.$$

1 pont

Mivel a három esemény diszjunkt, ezért annak a valószínűsége, hogy öt ugrás után a bolha az 1-es számú lapra érkezik vissza

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$

1 pont

Összesen: 10 pont