



A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, szakközépiskola)

FELADATLAP

- Adja meg a valós számok halmazán értelmezett összes olyan $f(x) = ax + b$ függvényt, amelyre az $a \neq 0$ feltétel mellett teljesül, hogy $f(a) = (a - b)^2$ és $f(b) = 2a + b$.
- Egy téglalap alakú papírlap oldalai 2019 és 2020 egység hosszúak. Mekkora az egyik átló mentén történő összehajtással keletkező síkidom területe?
- Legyenek azok a pozitív egész számok „unalmasak”, amelyeknek a tízes számrendszerbeli alakja legalább kétjegyű, és a számjegyei szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő sorrendben követik egymást.
 - Hány háromjegyű, csupa páratlan számjegyekből álló „unalmas” szám van?
 - Számolja ki az ötjegyű „unalmas” számok összegét.
- Az $ABCD$ konvex négyszögben $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DAC = 30^\circ$, $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ és az AC átló merőleges az AB oldalra. Legyenek az AB ; BC ; CD ; DA oldalak felezőpontjai rendre E ; F ; G ; H . Határozza meg az $EFGH$ négyszög oldalainak hosszát és területét, ha a BC oldal hossza $2\sqrt{7}$ cm.
- Oldja meg a valós számhármasok halmazán az

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} = 15; \quad 2x + 3y = 13$$

egyenletrendszer.

- Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig vannak számozva. Egy bolha a dobókocka 1-es számú lapján pihen. A bolha egy ugrással kizárólag a szomszédos lapok valamelyikére tud ugrani, és azok közül bármelyikre egyforma valószínűséggel. Onnan ismét egy vele szomszédos lapra ugorhat. Mennyi a valószínűsége, hogy öt ugrás után a bolha a kiinduló 1-es számú lapra érkezik vissza?

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.