A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Oldja meg a valós számok halmazán a
$$12 \cdot sin^2x + 7 \cdot ctg^2x = sin^2(2x) + 12$$
egyenletet.

Megoldás:
Mivel
$$ctgx = \frac{cosx}{sinx},$$
ezért $sinx \neq 0$, amely alapján $x \neq k\pi$; $(k\epsilon Z)$. 1 pont

Rendezzük 0-ra az egyenletet:
$$sin^2(2x) + 12 - 12 \cdot sin^2x - 7 \cdot ctg^2x = 0\,.$$

Felhasználjuk a $sin(2x) = 2 \cdot sinx \cdot cosx$ trigonometriai azonosságot, ezzel:
$$4 \cdot sin^2x \cdot cos^2x + 12 - 12 \cdot sin^2x - 7 \cdot \frac{cos^2x}{sin^2x} = 0\,,$$ 1 pont

továbbá $12 - 12 \cdot sin^2x = 12 \cdot (1 - sin^2x) = 12 \cdot cos^2x$ alapján
$$4 \cdot sin^2x \cdot cos^2x + 12 \cdot cos^2x - 7 \cdot \frac{cos^2x}{sin^2x} = 0\,.$$ 1 pont

A cos^2x tényező kiemelése után azt kapjuk, hogy:
$$cos^2x \cdot \left(4 \cdot sin^2x + 12 - \frac{7}{sin^2x}\right) = 0\,.$$ 1 pont

Mivel egy szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért

(1) $$cos^2x = 0$$

vagy

(2) $$4 \cdot sin^2x + 12 - \frac{7}{sin^2x} = 0\,.$$ 1 pont

Az (1) egyenletből azt kapjuk, hogy
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ (k \epsilon Z)$$
amely eleget tesz a feltételnek. 1 pont

A (2) egyenletből a $c = sin^2x$ helyettesítéssel és rendezéssel egy másodfokú egyenletet kapunk:

(3) $$4c^2 + 12c - 7 = 0\,.$$ 1 pont

A (3) egyenlet gyökei
$$c_1 = -\frac{7}{2};\ c_2 = \frac{1}{2},$$
amelyek közül a
$$c_1 = -\frac{7}{2}$$
a $sinx \neq 0$ feltétel miatt nyilvánvaló $c > 0$ miatt nem ad megoldást. 1 pont

A c_2 értékét visszahelyettesítve a $c = sin^2x$ kifejezésbe, a
$$sin^2x = \frac{1}{2}$$
egyenletet kapjuk, amelynek megoldása
$$x = \frac{\pi}{4} + m \cdot \frac{\pi}{2};\ (m \epsilon Z)\,.$$

Ez a megoldás szintén eleget tesz a feltételeknek. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, a kapott számok mindegyike megfelel a feltételeknek, ezért a feladat megoldásai az
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2};\ (k; m \epsilon Z)$$
valós számok. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Aladár matematika év végi osztályzata az elmúlt tanévben 4-es lett. Elgondolkodott a nyár folyamán: „Ha az utolsó két 1-es dolgozatomat 5-ösre írtam volna, akkor az év végi jegyem 5-ös lett volna. Viszont, ha mindkét évközi szóbeli feleletem egy jeggyel gyengébb lett volna, akkor 4-es helyett csak 3-ast kaptam volna év végén.” Legfeljebb hány ötöse lehetett Aladárnak az elmúlt tanévben matematikából?
(Az év végi jegy úgy számítandó, hogy ha a jegyek $\bar{x}$ átlagára $2{,}5 \leq \bar{x} < 3{,}5$ teljesül, akkor az év végi jegy 3-as, ha $\bar{x} \geq 4{,}5$, akkor pedig 5-ös.)

<u>Megoldás:</u>
Legyen Aladár múlt évi jegyeinek összege S, a jegyek darabszáma n.
Ezzel a jelöléssel Aladár matematika átlaga az elmúlt tanévben

$$\bar{x} = \frac{S}{n}.$$

Mivel Aladár 4-es osztályzatot kapott, ezért

(1) $$3{,}5 \leq \frac{S}{n} < 4{,}5\,.$$

Ha az utolsó két 1-es dolgozatát 5-ösre írta volna, akkor a jegyeinek összege $S + 8$, év végi jegye pedig 5-ös lett volna, tehát

(2) $$4{,}5 \leq \frac{S+8}{n}.$$ 1 pont

Ha viszont a feleletei egy jeggyel gyengébbek lettek volna, akkor a jegyeinek összege 2-vel csökken, és év végén 3-ast kapott volna, ezért

(3) $$2{,}5 \leq \frac{S-2}{n} < 3{,}5\,.$$ 1 pont

A (2) és (3) feltételeket felhasználva fennáll, hogy

$$4{,}5 \cdot n - 8 \leq S < 3{,}5 \cdot n + 2\,,$$

amelyből $n < 10$ következik. 1 pont

Mivel a maximális számú 5-öst kell meghatározni, ezért először $n = 9$-re keresünk megoldást. 2 pont

Ha $n = 9$, akkor

$$4{,}5 \cdot 9 - 8 \leq S < 3{,}5 \cdot 9 + 2\,,$$

$$32{,}5 \leq S < 33{,}5\,.$$

azaz a jegyek összege 33. 1 pont

Ekkor maximálisan 6 darab 5-öse lehetett Aladárnak, és a maradék három jegye 1-es kellett, hogy legyen. 1 pont

Számolással ellenőrizve $n = 9$ és $S = 33$ esetén Aladár átlaga

$$\frac{33}{9} = 3,\dot{6}$$

tehát valóban 4-es az év végi jegye, illetve ha két 1-es helyett két 5-öst kapott volna, akkor az átlaga

$$\frac{41}{9} = 4,\dot{5}$$

lett volna, ami 5-ös év végi jegynek felel meg.

Ha két 5-ös helyett két 4-est kapott volna, akkor az átlaga

$$\frac{31}{9} = 3,\dot{4}\,,$$

ami valóban 3-as év végi jegyet jelentett volna. 1 pont

Aladár minden jegye nem lehetett 5-ös, hiszen akkor az év végi jegye nem 4-es lett volna.
Ezért $n = 7$ esetben 6-nál több 5-ös jegye nem lehetett matematikából.

Az $n = 8$ esetet tekintve pedig az 5-ösök száma legfeljebb 7 lehetett volna, de ekkor a nyolcadik jegy legkisebb lehetséges értékét véve is azt kapnánk, hogy a jegyek összege $S = 36$, és így

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4{,}5\,,$$

ami a feltételnek ellentmondó 5-ös év végi jegyet eredményezett volna.

Ezért 9-nél kevesebb jegyből 6-nál több 5-öst a feladat feltételei mellett nem lehet szerezni, tehát az 5-ösök maximális száma 6. 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$\frac{1}{216}+\frac{1}{217}+\frac{1}{218}+\cdots+\frac{1}{2019}$$

kifejezés értéke nem lehet egész szám.

1. megoldás:
A $216;\ 217; \ldots;\ 2019$ számok között a legnagyobb kettőhatvány a

$$2^{10}=1024\,.$$ 3 pont

Ezért, ha a kifejezésben szereplő törteket közös nevezőre hozzuk, akkor a nevező osztható lesz 1024-gyel. 2 pont

Emiatt minden törtet bővíteni kell 2-nek valamelyik pozitív kitevőjű hatványával kivéve az

$$\frac{1}{1024}$$

törtet. 1 pont

Minden további bővítés páratlan számmal történik, vagyis az

$$\frac{1}{1024}$$

tört bővített alakjának számlálója páratlan szám. 1 pont

A bővítések elvégzése után a számlálóban 1803 darab páros szám és egy páratlan szám összege szerepel, vagyis a számláló páratlan szám. 1 pont

Mivel így a nevező osztható 1024-gyel, a számláló pedig nem, ezért az összeg nem lehet egész szám. 2 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:
A $216;\ 217; \ldots;\ 2019$ számok közül válasszunk ki egy olyan prímszámot, amelynek egyetlen többszöröse sem szerepel a számok között. Legyen ez például a 2017. 3 pont

Ha fenti törteket közös nevezőre hozzuk, akkor a nevező osztható lesz 2017-tel. 2 pont

Ekkor minden további törtet bővíteni kell 2017-tel, kivéve az

$$\frac{1}{2017}$$

törtet. 2 pont

Ekkor a számláló minden tagja, egyet kivéve osztható 2017-tel, ezért a számlálóban levő összeg nem lesz osztható 2017-tel, a nevező pedig igen. 1 pont

Vagyis a számláló nem lesz többszöröse a nevezőnek, tehát a kifejezés valóban nem lehet egész szám. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{log_x 2}}}=log_{4x}(9x-1).$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $9x-1>0;\ 4x>0;\ 4x\neq 1;\ x>0;\ x\neq 1$, továbbá az egyenlet bal oldalán szereplő törtek miatt

$$\frac{1}{log_x 2}\neq -1;\quad 1+\frac{1}{log_x 2}\neq -1;\quad \frac{1}{1+\frac{1}{log_x 2}}\neq -1$$

ahonnan egyszerű számolással kapjuk, hogy az egyenlet az

$$x>\frac{1}{9};\ \ x\neq\frac{1}{4};\ \ x\neq\frac{1}{2};\ \ x\neq 1$$

összefüggéseknek megfelelő valós számokra értelmezhető. 1 pont

Használjuk fel az

$$log_a b=\frac{1}{log_b a}$$

azonosságot, eszerint

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{log_x 2}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+log_2 x}}.$$ 1 pont

Alkalmazzuk az $1+log_a b=log_a a+log_a b=log_a(ab)$ átalakítást, ezzel

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+log_2 x}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{log_2(2x)}}.$$ 1 pont

A fenti átalakításokat többször elvégezve:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{log_2(2x)}}=1+\frac{1}{1+log_{2x}2}=1+\frac{1}{log_{2x}(4x)}=1+log_{4x}(2x)=$$
$$=log_{4x}(8x^2)\,.$$ 2 pont

Az eredeti egyenlet bal oldalának átalakítása után kapott egyenlet:

(1) $$log_{4x}(8x^2)=log_{4x}(9x-1)\,.$$ 1 pont

A logaritmus definíciója szerint

$$(4x)^{log_{4x}(8x^2)}=8x^2;\qquad (4x)^{log_{4x}(9x-1)}=9x-1\,,$$

ezért $8x^2=9x-1$, amelyből a

(2) $$8x^2-9x+1=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. 2 pont

A (2) egyenlet megoldásai

$$x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{8}$$

amelyek közül $x_1 = 1$ nem tesz eleget a kezdeti feltételeknek, ezért nem megoldása a feladatnak. 1 pont

Az

$$x_2 = \frac{1}{8}$$

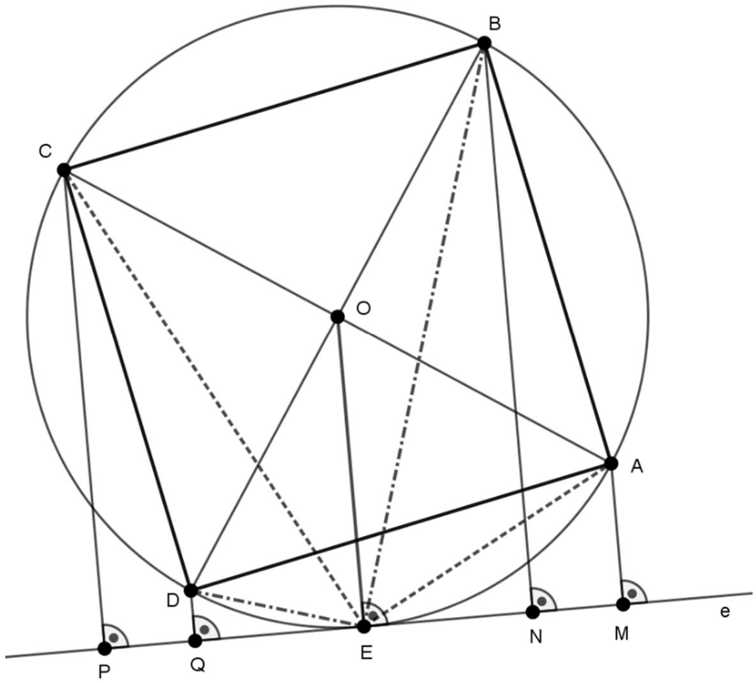
megfelel minden feltételnek és számolással ellenőrizhető, hogy valóban megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Az $ABCD$ négyzet körülírt körének tetszőleges pontjában húzzunk érintőt a körhöz. Vetítsük merőlegesen a négyzet A, B, C, D csúcsait erre az érintőre. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre M, N, P, Q.

Mutassa meg, hogy az $AM \cdot CP + BN \cdot DQ$ szorzatösszeg éppen a négyzet területének a felével egyenlő.

<u>Megoldás:</u>
Készítsünk ábrát a feladathoz, amelyen a négyzet körülírt körének középpontját O-val, a körülírt körhöz az E pontban húzott érintőt e-vel jelöltük.



1. ábra

Tekintsük először az $AMPC$ derékszögű trapézt.
Ebben az OE szakasz a trapéz középvonala, hiszen az érintési pontból húzott sugár merőleges az érintőre, tehát $OE \parallel AM \parallel CP$, és O pont az AC átló felezőpontja.

Ezért az $EM = x$ jelöléssel $EM = EP = x$. 1 pont

A Thalész-tétel miatt az $AEC\sphericalangle$ derékszög, így az AEMés az ECP derékszögű háromszögek E-nél található szögei pótszögek, tehát a háromszögek hasonlók. 1 pont

Ebből a megfelelő oldalak aránya

$$\frac{AM}{x} = \frac{x}{CP},$$

amelyből átrendezés után az

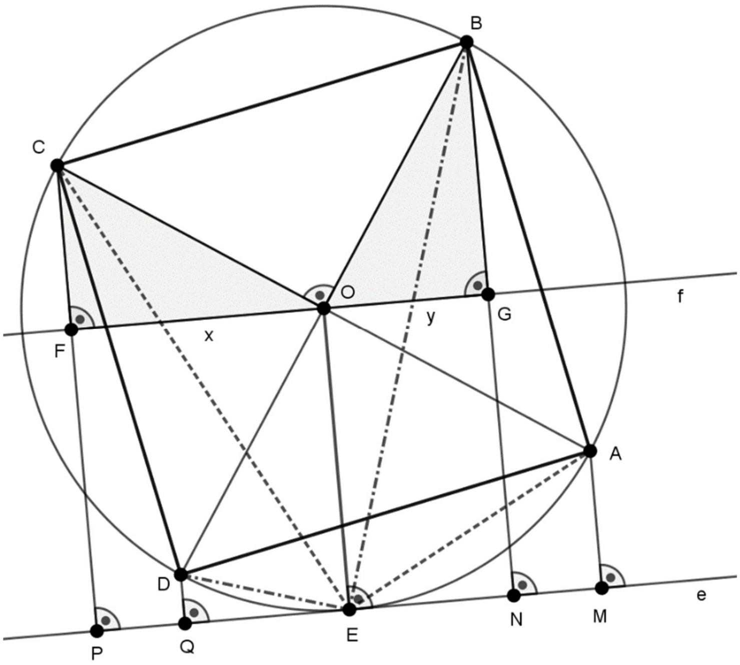
$$AM \cdot CP = x^2$$

összefüggést kapjuk. 2 pont

Ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk a $BNQD$ derékszögű trapézból, hogy az $EN = y$ jelöléssel $EN = EQ = y$, továbbá a BENés az EDQ derékszögű háromszögek hasonlóságából következően

$$BN \cdot DQ = y^2.$$ 2 pont

Tekintsük a 2. ábrát, amelyen az O ponton át párhuzamost húztunk az e egyenessel.



2. ábra

Ekkor $OF = EP = x$ és $OG = EN = y$, illetve $OC = OB = R$ a kör sugara, és $BOC\sphericalangle$ derékszög. 1 pont

A BOG és OCF derékszögű háromszögek $BOG\sphericalangle$ és $COF\sphericalangle$ szögei pótszögek, így a két derékszögű háromszög egybevágó, és ezért $BG = x$ illetve $CF = y$. 1 pont

Ebből következik, hogy

$$R^2 = x^2 + y^2.$$ 1 pont

Ismeretes, hogy a kör sugarának négyzete éppen fele a négyzet területének, így a négyzet területét T-vel jelölve

$$\frac{1}{2}T = R^2 = x^2 + y^2 = AM \cdot CP + BN \cdot DQ\ .$$

Ezzel az állítást igazoltuk. 1 pont

Összesen: 10 pont