A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. A tízes számrendszerben felírt x pozitív egész szám számjegyeinek összege 7, a számjegyek szorzata 6, és az x szám osztható 16-tal. Határozza meg az összes ilyen számot.

Megoldás:
A feladat feltételei alapján a 6 olyan, tízes számrendszerbeli számjegyek szorzatára való felbontásait keressük, amelyben a számjegyek összege 7. 2 pont
Az egyik ilyen felbontás:
(1) $$6 = 1 \cdot 6\,.$$

Ebben a felbontásban a számjegyek szorzata 6, a számjegyek összege 7, ezért ebből a felbontásból két tízes számrendszerbeli számot kapunk, a 16-ot és a 61-et. 1 pont

A feladat harmadik feltételének, hogy a keresett x szám 16-tal osztható legyen, a két kapott szám közül csak az
$$x = 16$$
felel meg, ez a feladat egyik megoldása. 1 pont

A 6 szám egy másik lehetséges felbontása $6 = 2 \cdot 3$, ebben a felbontásban azonban a számjegyek összege nem 7, ezért a felbontást két 1-es szorzóval kell bővítenünk:
(2) $$6 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\,.$$ 1 pont

Ebből a felbontásból olyan négyjegyű számot kell előállítani, amelynek oszthatónak kell lenni 16-tal, ezért az utolsó két számjegyéből álló szám a 12, vagy a 32. 1 pont
Ha az utolsó két számjegyből álló szám a 12, akkor az 1312 illetve 3112 számokat kapjuk, amelyek közül csak az 1312 osztható 16-tal, ezért az
$$x = 1312 = 16 \cdot 82$$
a feladat megoldása. 2 pont

Ha az utolsó két számjegyből álló szám a 32, akkor az 1132 négyjegyű számot kapjuk, amely azonban nem osztható 16-tal. 1 pont
A feladat mindegyik feltételének az $x = 16$ és az $x = 1312$ számok tesznek eleget, ezzel a feladat összes megoldását meghatároztuk. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Hányféle módon állítható elő a 2018 legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a $2018k$ darab egymást követő pozitív egész szám összegeként előállítható, ahol $k \geq 2$, és legyen az első szám a.
A k darab egymást követő pozitív egész szám egy $d = 1$ különbségű számtani sorozatot alkot. 1 pont

A számtani sorozat k-adik tagja $a_k = a + k - 1$. 1 pont

A számtani sorozat összegképletét alkalmazva

(1) $$S_k = \frac{a + a + k - 1}{2} \cdot k = \frac{2a + k - 1}{2} \cdot k\,.$$ 2 pont

A feladat feltétele szerint $S_k = 2018$, tehát az (1) egyenletből következően

(2) $$(2a + k - 1) \cdot k = 4036\,.$$ 1 pont

A (2) egyenlet bal oldalán szereplő két pozitív egész szám paritása különböző, mert az összegük páratlan, valamint nyilvánvaló, hogy $2a + k - 1 > k$, ezért a szorzatuk csak kétféleképpen lehet

$$4036 = 2^2 \cdot 1009\,,$$

mégpedig

(3) $$2a + k - 1 = 4036\,; k = 1$$

és

(4) $$2a + k - 1 = 1009\,; k = 4\,.$$ 2 pont

A (3) egyenletrendszerből nem kapunk megoldást, hiszen a feladat feltétele szerint $k = 1$ nem lehetséges. 1 pont

A (4) egyenletrendszerben a $k = 4$ értékből egyszerű számolással azt kapjuk, hogy $a = 503$. 1 pont
Eszerint a 2018 csak egyféleképpen állítható elő legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként. Ebben az előállításban szereplő legkisebb összeadandó az $a = 503$, az összeadandók száma $k = 4$.
Számolással könnyen ellenőrizhető, hogy valóban

$$503 + 504 + 505 + 506 = 2018.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Egy ládában megromlott a benne levő almák egy része. Eltávolítunk 10 hibás almát, így annak a valószínűsége, hogy a maradékból véletlenszerűen kivéve egy almát, az hibás lesz, felére csökken az eredetihez képest. Ezután még 5 hibás almát kiveszünk. Ezzel annak a valószínűsége, hogy a maradékból véletlenszerűen egyet kivéve, a kivett alma hibás lesz, az egyötödére csökken az eredeti állapothoz képest. Hány jó alma volt a ládában?

Megoldás:
Legyen ládában levő összes almák száma n, a hibás almák száma kezdetben x, ekkor a hibás alma kivételének valószínűsége

(1) $$P_1 = \frac{x}{n}.$$ 1 pont

Ha kiveszünk a hibásak közül 10 almát, akkor a ládában levő összes almák száma $n-10$, a hibás almák száma pedig $x-10$ lesz, így a hibás alma választásának esélye:

(2) $$P_2 = \frac{x-10}{n-10}.$$ 1 pont

Ha ezután kiveszünk még 5 hibás almát, akkor a ládában levő almák száma $n-15$, a hibás almák száma pedig $x-15$.

Ez azt jelenti, hogy a ládában maradt almák közül egyet véletlenszerűen választva annak az esélye, hogy a kiválasztott alma hibás

(3) $$P_3 = \frac{x-15}{n-15}.$$ 1 pont

A feladat további két feltétele szerint

$$P_2 = \frac{1}{2}P_1; \qquad P_3 = \frac{1}{5}P_1,$$

amelyből $2P_2 = P_1$, illetve $5P_3 = P_1$ következik. 1 pont

Ebből pedig (1) és (2), valamint (1) és (3) alapján azt kapjuk, hogy:

(4) $$\frac{2x-20}{n-10} = \frac{x}{n},$$

továbbá

(5) $$\frac{5x-75}{n-15} = \frac{x}{n}.$$ 1 pont

A (4) egyenletből a nevezőkkel beszorozva és rendezve

(6) $$xn = 20n - 10x,$$

az (5) egyenletből pedig hasonlóan

(7) $$4xn = 75n - 15x.$$ 1 pont

A (6) egyenlet mindkét oldalát 4-gyel szorozhatjuk, majd a kapott egyenlet és a (7) egyenlet jobb oldalait egyenlővé téve

$$80n - 40x = 75n - 15x,$$

innen pedig rendezés és egyszerűsítés után

$$n = 5x\,.$$ 1 pont

A kapott összefüggést a (6) egyenletbe írva, a műveletek elvégzésével, rendezéssel és egyszerűsítéssel az

$$x^2 - 18x = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $x_1 = 0$ és $x_2 = 18$. 1 pont

Az $x_1 = 0$ a feladatnak nem megoldása, mert ellentmond a feladat szövegének. Ebből az következik, hogy csak $x = 18$ lehetséges.

A ládában levő jó almák száma eszerint 72. 1 pont

Kezdetben az összes almák száma 90, a hibás almák száma 18 volt, ezért a hibás alma kivételének valószínűsége

$$\frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

10 hibás alma kivétele után a ládában összesen 80 alma maradt, ebből 8 hibás, vagyis a hibás alma kihúzásának esélye

$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10},$$

az eredeti valószínűség felére csökkent.
Újabb 5 hibás alma kivételével a ládában maradt almák száma 75, ezek között 3 hibás maradt, tehát a hibás alma kivételének valószínűsége ekkor

$$\frac{3}{75} = \frac{1}{25},$$

ez pedig valóban ötödrésze a kiinduló esethez tartozó valószínűségnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
A megoldás során a feladat szövegével összhangban feltettük, hogy az összes almák száma 15-nél több, vagyis $n \neq 0$; $n \neq 10$ valamint $n \neq 15$, így az (1)-(2)-(3) egyenletekben szereplő törtek mindegyike értelmezve van.

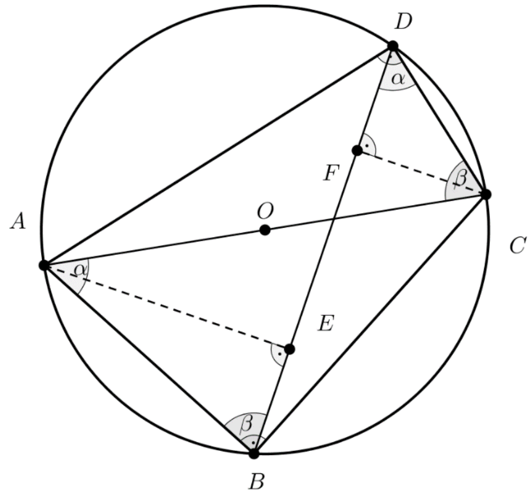
4. Az $ABCD$ húrnégyszög AC átlója a húrnégyszög körülírt körének átmérője. Bizonyítsa be, hogy a négyszög szemközti oldalainak a BD átlóra eső merőlegesvetületei egyenlő hosszúak.

1. Megoldás:

Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének átmérője AC, a kör középpontja O. Thalész tétele értelmében $ABC\sphericalangle = 90°$, és $ADC\sphericalangle = 90°$.
Ugyanakkor a $BAC\sphericalangle = \alpha$ és $DBA\sphericalangle = \beta$ jelölésekkel a húrnégyszög körülírt körében a kerületi szögek tétele miatt

$$BDC\sphericalangle = \alpha;\ DCA\sphericalangle = \beta\ .$$

is fennáll (1. ábra). 2 pont



1. ábra

Az ACB derékszögű háromszögben $AB = AC \cdot \cos\alpha$, az ABE derékszögű háromszögben pedig $BE = AB \cdot \cos\beta$.
Ebből az következik, hogy

(1) $$BE = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$ 2 pont

Hasonlóképpen az ACD derékszögű háromszögből a β hegyesszög koszinuszának definíciója alapján azt kapjuk, hogy $CD = AC \cdot \cos\beta$, a CDF derékszögű háromszögből pedig azt, hogy $DF = CD \cdot \cos\alpha$.

Ez azt jelenti, hogy

(2) $$DF = AC \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha.$$ 2 pont

Az (1) és (2) összefüggések szerint

(3) $$BE = DF = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

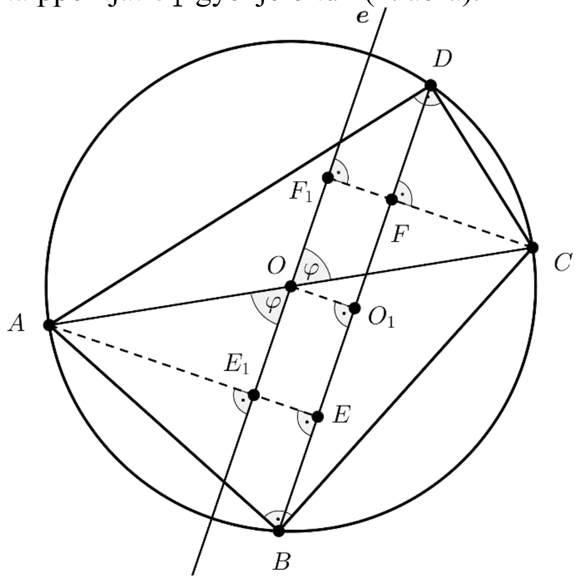
tehát a húrnégyszög AB és CD oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak. 1 pont

A BE és DF szakaszok hosszának egyenlőségéből $BF = DE$ is következik, hiszen az 1. ábra alapján világosan látszik, hogy $BF = BE + EF$, valamint $DE = DF + EF$. 2 pont

Az $ABCD$ húrnégyszög szemben levő AB; CD illetve AD; BC oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületeinek hossza tehát egyenlő, ez éppen a feladat állítása. 1 pont

Összesen: 10 pont

<u>2. Megoldás:</u>
Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének O középpontján át megrajzoltuk a BD átlóval párhuzamos e egyenest, amelyet az $A; C$ pontokból a BD átlóra bocsátott merőlegesek rendre az E_1; F_1 pontokban metszik. Az O pontból a BD átlóra állított merőleges talppontját O_1-gyel jelöltük (2. ábra). 2 pont



2. ábra

Az AOE_1 és COF_1 derékszögű háromszögek egybevágók, mert az $AOE_1\sphericalangle$ és $COF_1\sphericalangle$ hegyesszögek csúcsszögek, továbbá nyilvánvaló, hogy $AO = CO$, ez két szakasz a kör egy-egy sugara. 2 pont

Az AOE_1 és COF_1 derékszögű háromszögek egybevágósága azt is jelenti, hogy $OE_1 = OF_1$, mivel pedig OO_1FF_1, valamint OO_1EE_1 téglalapok, ezért

(1) $$O_1E = O_1F\,.$$ 2 pont

Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének O középpontjából a kör bármely húrjára bocsátott merőleges felezi a húrt, ezért az O_1 pont a BD szakasz felezőpontja. 1 pont

Ebből pedig (1) alapján az következik, hogy

$$BE = O_1B - O_1E = O_1D - O_1F = DF,$$

azaz

(2) $$BE = DF\,.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$BF = O_1B + O_1F = O_1D + O_1E = DE,$$

vagyis

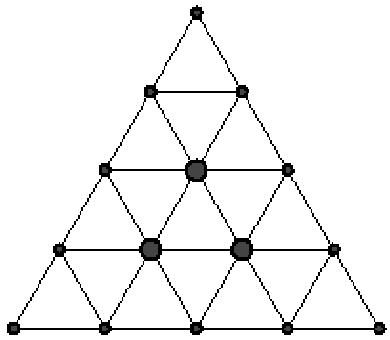
(3) $$BF = DE.$$ 2 pont

A (2) és (3) összefüggések éppen azt jelentik, hogy a húrnégyszög szemközti oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
A feladat állítása könnyen igazolható arra a speciális esetre, amikor az AC átló mellett a BD átló is átmérője az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének.

5. A mellékelt ábra szerinti táblán korongokkal játszunk. Induláskor 3 korong van a táblán, a rajzon ezeket a nagyobb körök jelzik. Két pont szomszédos, ha él köti össze őket. A tábla szabad pontjaiba egyenként további korongokat akarunk helyezni úgy, hogy ha a feltett korongnak van közvetlen szomszédja (egy vagy több), akkor a szomszédok közül pontosan egyet kötelező levenni. A játék folyamán mennyi lehet a táblán lévő korongok



a) minimális száma?
b) maximális száma?
c) Adjon meg egy eljárást a maximális érték eléréséhez.

Megoldás:

Ha egy korongot felteszünk a táblára, akkor, amennyiben a feltett korongnak van szomszédja, akkor egy korongot le kell vennünk, azaz a táblán levő korongok száma nem változik. Ha a feltett korongnak nincs szomszédja, akkor a szabályok szerint a táblán marad, vagyis a táblán levő korongok számát növeltük. 1 pont

Ebből azonnal következik, hogy a táblán levő korongok minimális száma 3. 1 pont

A korongok számának maximális értéke nem lehet 14.

Ugyanis a táblán levő 15 pont mindegyike olyan tulajdonságú, hogy van legalább két szomszédja. 1 pont

Ezért, ha feltételezzük, hogy a táblára már 13 korong fölkerült, akkor pontosan két helyen nincs még korong, ezek bármelyikére a 14. korongot föltéve, annak legalább egy szomszédja lesz a táblán levő korongok közül, vagyis a játékszabály szerint egy korongot le kell venni. 1 pont
Ebből azonnal adódik, hogy a táblára helyezhető korongok maximális száma 15 sem lehet. 1 pont

Így legfeljebb 13 korong lehet egyszerre a táblán.
Megmutatjuk, hogy 13 korong a játékszabály betartása mellett valóban elhelyezhető a táblán.
A tábla alsó vízszintes sorának 5 pontját balról indulva betűzzük meg, a pontok jele A_1; A_2; A_3; A_4; A_5. A tábla következő sorának pontjai B_1; B_2; B_3; B_4, a harmadik sor pontjai C_1; C_2; C_3, a negyedik sorban vannak a D_1; D_2 pontok, végül az ötödik sor egyetlen pontja E_1.
A játék indítása előtt a táblán a B_2; B_3; C_2 pontokban van korong, ezeket előbb fokozatosan leszedjük, közben az A_1; A_2; A_3; A_4; A_5 sort több lépésben feltöltjük korongokkal. 1* pont

Tegyünk a B_1 pontba egy korongot és a játékszabály szerint vegyük le a B_2 pontban fent levőt.
Ezután tegyünk egy korongot az A_1 pontba és vegyük le a B_1 pontba előzőleg tett korongot. Az A_1 pontba helyezett korongot a továbbiakban már nem mozdítjuk el.

A következő lépéssorozattal pedig korongot helyezünk az A_2 pontba:
korongot teszünk B_2-re és levesszük B_3-at, majd A_2-re teszünk korongot és a játékszabályt betartva levesszük a B_2 pontbeli korongot. Ezután az A_2 pontbeli korong már nem mozdul el.
Ezután a B_3 pontba téve korongot, levesszük C_2-t, hiszen ezek szomszédok, majd az A_3 pontba korongot teszünk, levesszük B_3-at és A_3-at a továbbiakban nem mozgatjuk.
Mivel a B_4 pontnak ebben a helyzetben nincs szomszédja, ezért oda más korong levétele nélkül egy korongot tehetünk, majd A_4-be korongot téve levesszük az imént föltett B_4 korongot. Az A_4 pontbeli korong innen már nem mozdul.

Az eddigi állást tekintve C_3-nak nincs szomszédja, oda tehát egyéb korong levétele nélkül helyezünk egy korongot, majd visszateszünk B_4-be egyet és levesszük a C_3 korongot. Végül az A_5 pontba korongot teszünk, és egyúttal levesszük B_4-et.
Ezzel elértük azt, hogy a táblán csak az A_1; A_2; A_3; A_4; A_5 pontokban vannak korongok. 2* pont

Az eddigihez teljesen hasonlóan tölthetők fel korongokkal a B_1; B_2; B_3; B_4 pontok a felettük levő C_1; C_2; C_3 pontok felhasználásával, illetve a C_1; C_2; C_3 pontok a felettük levő D_1; D_2 és E_1 pontok segítségével. 1* pont

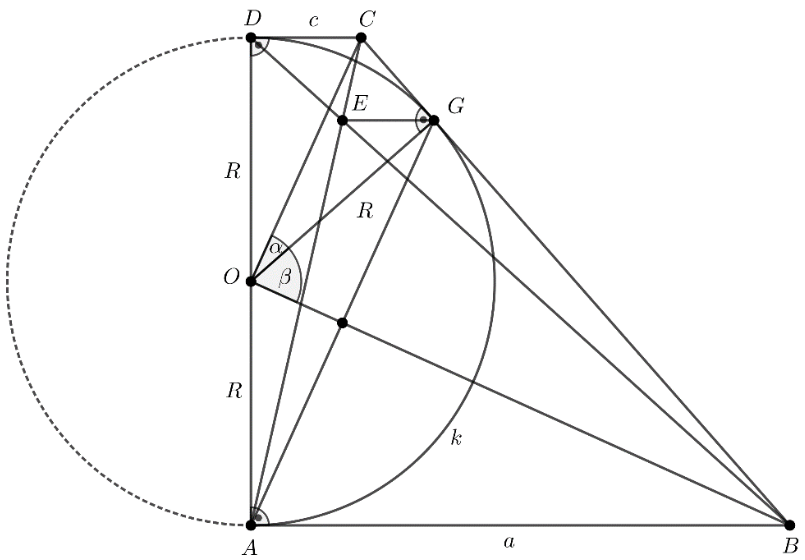
Ha ezt a feltöltést befejeztük, akkor a táblán pontosan 12 ponton áll korong. Helyezzünk el ezután az E_1 pontba egy korongot, az ezzel szomszédos D_1; D_2 pontokban nincs korong, tehát nem kell levennünk egy korongot sem. Az eljárás segítségével tehát valóban sikerült a táblára 13 korongot tennünk. 1* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
A *-gal jelzett pontokat a versenyző bármely más, pontosan leírt, helyes eljárás esetén megkapja.

6. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD, amelyekre $AB > CD$, továbbá teljesül, hogy a trapéz AD szára merőleges AB-re. Az AD szár, mint átmérő fölé szerkesztett kör a BC szárat érinti. Jelöljük a trapéz átlóinak metszéspontját E-vel és húzzunk az E ponton át párhuzamost az AB oldallal, ez az egyenes a BC szárat az F pontban metszi. Az AD szár felezőpontját O-val jelöljük.
Bizonyítsa be, hogy $AF \parallel OC$ és $OF \perp BC$.

Megoldás:
A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk, amelyen az AD átmérőjű, O középpontú, R sugarú k kör és a trapéz BC szárának érintési pontját G-vel jelöltük (3. ábra).



3. ábra

Megmutatjuk, hogy a feladatban szereplő F pont és a G érintési pont azonos.

A k körhöz a $B; C$ pontokból húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért az $AB = a; CD = c$ jelöléssel

(1) $$BG = a; CG = c.$$ 1 pont

A trapéz AB és CD alapjának párhuzamossága miatt az ABE és CDE háromszögek megfelelő szögei egyenlők, ez a két háromszög tehát hasonló. Megfelelő oldalaik aránya

(2) $$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{c}{a}.$$ 1 pont

Az $ACB\sphericalangle CA$ és CB szárain szereplő szakaszokra (1) és (2) alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CG}{BG} = \frac{c}{a}.$$ 1 pont

Ebből a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt azt kapjuk, hogy $EG \parallel AB$, ez pedig feltételek alapján azt jelenti, hogy $EF = EG$.
Ezért az F és G pontok valóban azonosak.
Ezzel igazoltuk a feladatnak azt az állítását, hogy $OF \perp BC$, hiszen
$OF = OG = R$ a k kör sugara, $CF = CG$ a k kör érintője. 2* pont

Az $ABFO$ négyszögben tehát $AB = AF = a$ és $OA = OF = R$, tehát a négyszög deltoid. Hasonlóan beláthatjuk, hogy a $DCFO$ négyszög is deltoid.
A két deltoidban az OB; OC átlók rendre felezik $AOF\sphericalangle$; $DOF\sphericalangle$ szögeket, ezért az ábra jelöléseivel

(3) $$\alpha + \beta = 90°.$$ 2 pont

A (3) összefüggés azt is jelenti, hogy $OC \perp OB$. 1 pont

Ugyanakkor $AF \perp OB$ is igaz, mivel az $ABFO$ deltoid átlói merőlegesek egymásra.
Tehát az AF és OC szakaszok ugyanarra az OB szakaszra merőlegesek, ezért párhuzamosaknak kell lenniük egymással, ezzel a feladat $AF \parallel OC$ állítását is bizonyítottuk. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
A 2* pontot a versenyző nem kaphatja meg, ha a párhuzamos szelők tételének megfordítása helyett a párhuzamos szelők tételére hivatkozik.