



A 2017/2018. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA (SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATOK

- Határozza meg azt a tízes számrendszerben felírt legkisebb természetes számot, amely 57-ed részére csökken, ha az első számjegyét elhagyjuk.
- Oldja meg a valós számpárok halmazán az
$$\frac{x}{y} - 1 = 1 - \frac{y}{x}; \quad x^5 + y^5 + x^2 + y^2 = 0$$
egyenletrendszert.
- Adja meg az
$$\frac{x^2}{x-1}$$
kifejezés minimális értékét, ha x olyan valós szám, amelyre $x > 1$ teljesül.
- Igaz-e, hogy 50 pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani 8-at úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely két szám különbsége osztható legyen 7-tel?
- Mátyás király egy csatában aratott győzelmet ünnepel a visegrádi palotában. A trónteremben először négy hadvezérét fogadja.
 - A trónteremben a királyon és a hadvezéreken kívül más nem tartózkodik. Mindenki kezében egy-egy kupa bor van, sétálgatnak, beszélgetnek a győztes csatáról. Azt veszik észre, hogy minden pillanatban bármely két személy között a távolság különböző. A király adott jelére mindenki (a király is) átadja a kupáját a hozzá legközelebb levő személynek. Igazoljuk, hogy ezután lesz olyan személy a trónteremben, akinek a kezében egynél több kupa van.
 - A hadvezérek távozása után Mátyás király 50 lovagját fogadja a trónteremben. Mindenki kezében ismét egy-egy kupa bor van és a beszélgetés minden pillanatában bármely két ünneplő személy közötti távolság különböző. A király a lovagoknak is jelez, a jelre az 50 lovag és a király is átadja kupáját a hozzá legközelebb álló személynek. Mutassuk meg, hogy ezúttal is lesz olyan személy a teremben, akinek a kezében legalább két kupa van.
- Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja E , a CD oldal felezőpontja F . Legyen G a DE és BF szakaszok metszéspontja, G tükörképe az EF egyenesre legyen H . Bizonyítsa be, hogy az A, E, H, F pontok egy körre illeszkednek.

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.