A 2016/2017. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Egy számtani sorozat első tagja 101, differenciája egyjegyű természetes szám. Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 997, ha ismert, hogy ez a szám a sorozat legnagyobb háromjegyű tagja?

Megoldás:
A d differenciájú számtani sorozat n-edik tagjára vonatkozó formula szerint
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$
és így az ismert adatokkal
$$997 = 101 + (n-1) \cdot d,$$
ahonnan
(1) $$896 = (n-1) \cdot d.$$

Az (1) egyenletben nyilvánvaló, hogy $n \geq 2$, $n \in N$, továbbá a feladat feltétele miatt

(2) $$1 \leq d < 10,$$
ahol $d \in N$. 1 pont

A 896 szám prímtényezős felbontása:

(3) $$896 = 2^7 \cdot 7.$$

Az (1) és (2) összefüggések szerint a d differencia csak a 896 szám egyjegyű pozitív osztója lehet, ezért (3) alapján
$$d = 1, d = 2, d = 4, d = 7 \text{ vagy } d = 8.$$ 2 pont

A kapott megoldásokat a feltételnek megfelelően aszerint vizsgáljuk, hogy a kapott d számokra van-e a számtani sorozat tagjai között 997-nél nagyobb háromjegyű szám.
A sorozat 997-et követő tagja
$$997 + d.$$

Ha $d \leq 2$ akkor a sorozat következő tagja is háromjegyű, ez pedig ellenkezik a feladat feltételével.
Ha pedig $d > 2$, akkor a sorozat következő tagja legalább négyjegyű szám, így elegendő a $d = 4, d = 7$ és $d = 8$ esetek vizsgálata. 2* pont

Ha $d = 4$, akkor a fentiek szerint a sorozatnak nincs 997-nél nagyobb háromjegyű tagja, tehát elég megállapítani $d = 4$ esetén az n szám értékét.
Ehhez a

$$997 = 101 + (n - 1) \cdot 4$$

egyenletből azt kapjuk, hogy $n = 225$, ezért 997 a sorozat 225. tagja. 1 pont

Ha $d = 7$, akkor a sorozatnak ismét nincs 997-nél nagyobb háromjegyű tagja, a feladat ezért annak a kiszámítása, hogy most a sorozatnak hányadik tagja a 997.

A

$$997 = 101 + (n - 1) \cdot 4$$

egyenlet megoldásával adódik, hogy $n = 129$, tehát 997 a sorozat 129. tagja. 1 pont

Végül, ha $d = 8$, akkor a sorozatnak a 997-nél nagyobb tagjai legalább négyjegyűek, elegendő tehát a

$$997 = 101 + (n - 1) \cdot 8$$

egyenletből n értékét kiszámítani.

Egyszerű számolással azt kapjuk, hogy $n = 113$, így 997 a sorozat 113. tagja. 1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, eredményeink szerint a feladat feltételeit három sorozat elégíti ki, ezekben

$$a_1 = 101, d = 4,$$
$$a_1 = 101, d = 7,$$
$$a_1 = 101, d = 8,$$

és mindhárom sorozatnak tagja a 997, mégpedig rendre

$$a_{225} = 997,$$
$$a_{129} = 997,$$
$$a_{113} = 997.$$

<u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u>
A 2* pontot akkor is megkapja a versenyző, ha a $d = 1$ és $d = 2$ differenciák esetén számítással igazolja, hogy a sorozatnak van 997-nél nagyobb háromjegyű tagja.
Ezek a tagok a $d = 1$ különbségre $a_{898} = 998$ és $a_{899} = 999$, illetve a $d = 2$ különbségre $a_{450} = 999$.

2. Egy $3x3$ -as táblázat egységnégyzeteibe beírjuk 1-től 9-ig a számokat (mindegyiket pontosan egyszer). Ezután a $3x3$ -as táblázatra minden lehetséges módon ráteszünk egy négy egységnégyzetből álló $2x2$-es táblázatot és kiszámítjuk az ebben levő négy szám összegét, végül az így kapott összegeket összeadjuk. Ezt megismételjük a $3x3$-as táblázat minden lehetséges kitöltése esetén.

   a) Határozza meg a fenti módon kapható összegek minimumát és maximumát!
   b) Megkapható-e minden, a minimum és a maximum közé eső pozitív egész szám? (Válaszát indokolja!)

<u>Megoldás:</u>
Töltsük ki az alábbi táblázatot az $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ betűkkel, ahol a betűk mindegyike az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számok közül pontosan az egyikkel egyenlő (1. ábra).

a	b	c
d	e	f
g	h	i

1. ábra

Összeadással kapjuk, hogy

(1) $a+ b+c+d+e+f+g+h+i=1+ 2+3+4+5+6+7+8+9=45\,.$ 1 pont

Az 1. ábra táblázatára egy azonos méretű egységnégyzetekkel rendelkező $2x2$-es táblázatot pontosan négyféle módon helyezhetünk rá.
Az ezekben szereplő $4-4$ szám S-sel jelölt összege

(2) $$S=a+c+g+i+2b+2d+2f+2h+4e\,.$$ 1 pont

Az (1) és (2) eredmények összevetésével adódik, hogy

(3) $$S=45+b+d+f+h+3e\,.$$ 1 pont

A (3) alatti S összeg nyilván akkor a legnagyobb, ha $b+d+f+h+3e$ maximális, ez pedig akkor áll elő, ha a b , d , f , h betűk mindegyike az 5 ,6 ,7 ,8 számok közül pontosan az egyikkel egyenlő, továbbá $e=9$.
Ekkor a $3x3$-as négyzet saroknégyzeteiben az 1 , 2 ,3 ,4 számok helyezkednek el.

Eszerint a feladatban leírt eljárással kapható összegek maximuma

$$S_{max}=45+26+27=98\,.$$ 1 pont

Az eljárás során kapható összegek minimumát pedig akkor kaphatjuk meg, ha $b + d + f + h + 3e$ minimális, tehát ha a $3x3$-as táblázat közepén az 1-es szám van, vagyis $e = 1$, valamint a b , d , f , h betűk mindegyike az 2 ,3 ,4 ,5 számok közül pontosan az egyikkel egyenlő, ekkor a $3x3$-as táblázat saroknégyzeteiben a 6 ,7 ,8 ,9 számok vannak. Ebből az következik, hogy a minimális összeg

$$S_{min} = 45 + 14 + 3 = 62 \, .$$ 1 pont

A b) kérdés megválaszolásához először induljunk ki a betűknek illetve a számoknak a minimális összeghez tartozó elhelyezkedéséből.
Ekkor, mint láttuk, a $3x3$-as táblázat középső négyzetén az 1-es szám van, az oldalak középső négyzetein a 2 ,3 ,4 ,5 számok, a (2) összegben egyszeresen előforduló a , c , g , i betűk helyén (a saroknégyzeteken) pedig a 6 ,7 ,8 ,9 számok.

Változtassuk meg ezt az elhelyezkedést úgy, hogy az 5-ös és 6-os számot fölcseréljük. Ezzel a (2)-beli $a + c + g + i$ összeget 1-gyel csökkentettük, de a cserével a $2b + 2d + 2f + 2h$ összeget éppen 2-vel növeltük, így az S összeg értéke pontosan 1-gyel nőtt, vagyis a csere után

$$S = 63 \, .$$ 1 pont

Ezután cseréljük föl a 6-os és 7-es számot, könnyen beláthatjuk, hogy az így létrehozott cserével az összeg ismét 1-gyel nő, ezért a csere következtében

$$S = 64 \, .$$

Kézenfekvő, hogy ezután cseréljük meg a 7-es és a 8-as, a következő lépésben pedig a 8-as és a 9-es számot, ezzel megkapható az $S = 65$ és az $S = 66$ összeg. 1 pont

A következő lépéssorozatban a 4-est cseréljük az 5-ösre, majd az 5-öst a 6-osra, a 6-ost a 7-esre, végül a 7-est a 8-asra, ezzel az $S = 67$, $S = 68$, $S = 69$, $S = 70$ összegek mindegyikét megkapjuk.
A lépéssorozatok ezután a 3-as majd a 2-es számból indulnak ki, és rendre a 7-es illetve a 6-os számig tartanak, ezekkel minden számot megkapunk az $S = 78$ összegig. 1 pont

Az $S = 78$ összeget úgy is előállíthatjuk, hogy az 1. ábra táblázatában az a , c , g , i betűk helyén valamilyen elrendezésben az 1 , 4 , 5 , 6 számok vannak, a tábla közepén a 2-es szám, a 3 , 7 , 8 , 9 számok pedig az oldalak középső négyzetein.
Ebből kiindulva végrehajtjuk a $3 \to 4$, $4 \to 5$, $5 \to 6$ cseréket, ezzel megkaphatjuk az $S = 79$, $S = 80$, $S = 81$ összegeket. 1 pont

Végül kiindulhatunk a maximális összegből is, ekkor, mint láttuk, az b , d , f , h betűk mindegyike az 5 ,6 ,7 ,8 számok közül pontosan az egyikkel egyenlő, a tábla közepén 9-es szám van, tehát $e = 9$, a saroknégyzetekben pedig az 1 , 2 ,3 ,4 számok és ekkor $S_{max} = 98$.
A számok cseréjének fenti módszerét alkalmazva 1-esével csökkenthetjük az összeget és így eljuthatunk $S_{max} = 98$ összegtől az $S = 82$ összegig.

Ez pedig azt jelenti, hogy a b) kérdésre a válasz az, hogy minden, az $S_{min} = 62$ és $S_{max} = 98$ közötti összeget elérhetünk. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Bizonyítsa be az $(ab+b^2)\cdot(a^2+ba)\le 1$ egyenlőtlenséget, ha a és b olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy $a^2+b^2=1$!
Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás:
A bizonyítandó egyenlőtlenség első zárójeles kifejezéséből a b, a másodikból az a tényezőt kiemelhetjük, ezzel az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$ab\cdot(a+b)\cdot(a+b)\le 1,$$

azaz

(1) $$ab\cdot(a+b)^2\le 1.$$ 1 pont

Mivel $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ és ez az $a^2+b^2=1$ feltétel miatt $(a+b)^2=1+2ab$ alakba is írható, ezért elegendő az

(2) $$ab\cdot(1+2ab)\le 1$$

egyenlőtlenséget bizonyítani. 2 pont

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív a^2 és b^2 számokra!
Eszerint

$$\frac{a^2+b^2}{2}\ge\sqrt{a^2\cdot b^2}.$$ 1 pont

Az a,b pozitív számok, ezért $\sqrt{a^2\cdot b^2}=ab$, így az $a^2+b^2=1$ feltétel ismételt figyelembevételével azt kapjuk, hogy

(3) $$ab\le\frac{1}{2}.$$ 1 pont

A (3) összefüggésből az következik, hogy $2ab\le 1$, és ezért

(4) $$1+2ab\le 2.$$ 1 pont

A (3) és (4) egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak összeszorzásával

$$ab\cdot(1+2ab)\le 1$$

ez pedig éppen a bizonyítandóval ekvivalens (2) egyenlőtlenség. 2 pont

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, mikor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségben az egyenlőség esete valósul meg, vagyis akkor, amikor $a^2=b^2$, azaz

$$a=b.$$

Ekkor

$$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
A (3) egyenlőtlenséghez úgy is eljuthatunk, hogy az $u=ab$ helyettesítéssel (2) alapján megoldjuk a $2u^2+u-1\le 0$ egyenlőtlenséget pozitív u számokra.

4. Határozza meg azt a legkisebb p természetes számot, amelyre az

$$log_{1-2x}(x+2p) = 1 + log_{\frac{1}{1-2x}}(p-x)$$

egyenlet mindkét oldala értelmezhető és az egyenletnek van legalább egy valós megoldása!

Megoldás:
Az egyenlet két oldalán szereplő logaritmikus kifejezések alapszáma a logaritmus értelmezése miatt csak pozitív szám lehet, valamint $1-2x \neq 1$, ezért

(1) $$x < \frac{1}{2}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

A logaritmus értelmezése miatt mindkét oldalon a logaritmikus kifejezés numerusza pozitív, azaz egyszerre kell teljesülnie az $x+2p > 0$ és $p-x > 0$ feltételeknek, ebből azt kapjuk, hogy

(2) $$-2p < x < p\,.$$ 1 pont

A különböző alapú logaritmusok közötti átváltási összefüggés miatt

$$log_{\frac{1}{1-2x}}(p-x) = \frac{log_{1-2x}(p-x)}{log_{1-2x}\frac{1}{1-2x}}\,,$$

és mivel

$$log_{1-2x}\frac{1}{1-2x} = -1\,,$$

ezért

(3) $$log_{\frac{1}{1-2x}}(p-x) = -log_{1-2x}(p-x)\,.$$ 1 pont

Az (1) feltétel figyelembe vételével

(4) $$log_{1-2x}(1-2x) = 1\,.$$

A (3) és (4) eredmények alapján az eredeti egyenletet átalakítjuk:

$$log_{1-2x}(x+2p) + log_{1-2x}(p-x) = log_{1-2x}(1-2x)\,,$$

innen pedig az azonos alapú logaritmikus kifejezések összeadására vonatkozó azonosságot alkalmazva:

(5) $$log_{1-2x}[(x+2p)\cdot(p-x)] = log_{1-2x}(1-2x)$$

Az $a = 1-2x$, $b = (x+2p)\cdot(p-x)$ és $c = log_{1-2x}[(x+2p)\cdot(p-x)]$ jelölésekkel az (5) egyenlet bal oldalát az $log_a b = c$ alakba írhatjuk, ahol a feltételek szerint $a\,, b, c$ pozitív számok.
A logaritmus definíciója alapján

$$a^c = b\,.$$

Az (5) egyenlet jobb oldalának értéke ugyancsak c, így a logaritmus definícióját a jobb oldalra alkalmazva

$$a^c = a.$$

A kapott két összefüggés pontosan azt jelenti, hogy $a = b$, azaz

$$(x+2p)\cdot(p-x) = 1-2x\,.$$ 2 pont

A kapott egyenletből a műveletek elvégzésével és rendezéssel az

(6) $$x^2 + (p-2) \cdot x + 1 - 2p^2 = 0$$

paraméteres másodfokú egyenletet kapjuk. 1 pont

A (6) egyenletnek akkor van legalább egy valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, vagyis, ha:

$$(p-2)^2 - 4 \cdot (1 - 2p^2) \geq 0\,,$$

ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel adódik, hogy:

(7) $$9p^2 - 4p \geq 0\,.$$

Az $f(p) = 9p^2 - 4p$ másodfokú függvény zérushelyei

$$p_1 = 0 \text{ és } p_2 = \tfrac{4}{9}.$$ 1 pont

A (7) egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha $p \leq 0$ vagy $p \geq \frac{4}{9}$, mivel azonban a feltétel szerint $p \in N$, ezért $p = 0$ vagy $p \geq 1$. 1 pont

Feladatunk a legkisebb olyan $p \in N$ paraméter megkeresése, amelyre a (6) egyenletnek, és így az eredeti egyenletnek legalább egy megoldása van.

Vizsgáljuk először a $p = 0$ esetet. Ez a paraméter nem felel meg a (2) feltételnek, továbbá $p = 0$ mellett a (6) egyenlet megoldása $x = 1$, ez ellentmond az (1) feltételnek és $x = 1$ esetén az eredeti egyenlet logaritmikus kifejezései nem értelmezhetők. Ezért $p = 0$ nem megoldása a feladatnak. 1 pont

A $p \geq 1$ feltételnek megfelelő legkisebb természetes szám a $p = 1$.
Ekkor a (6) egyenlet

$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

amelynek megoldásai

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Az x_1 nem felel meg az (1) feltételnek.
Ellenőrzés után azt kapjuk, hogy x_2 megfelel az (1) és (2) feltételeknek is, továbbá az x_2 számra értelmezhetők az eredeti egyenlet logaritmikus kifejezései is. 1 pont

Végeredményünk tehát az, hogy $p = 1$ az a legkisebb természetes szám, amelyre a kiinduló egyenlet mindkét oldala értelmezhető, ekkor az egyenletnek pontosan egy megoldása van, ez a megoldás

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

és megállapíthatjuk, hogy ekkor az egyenlet mindkét oldalának értéke

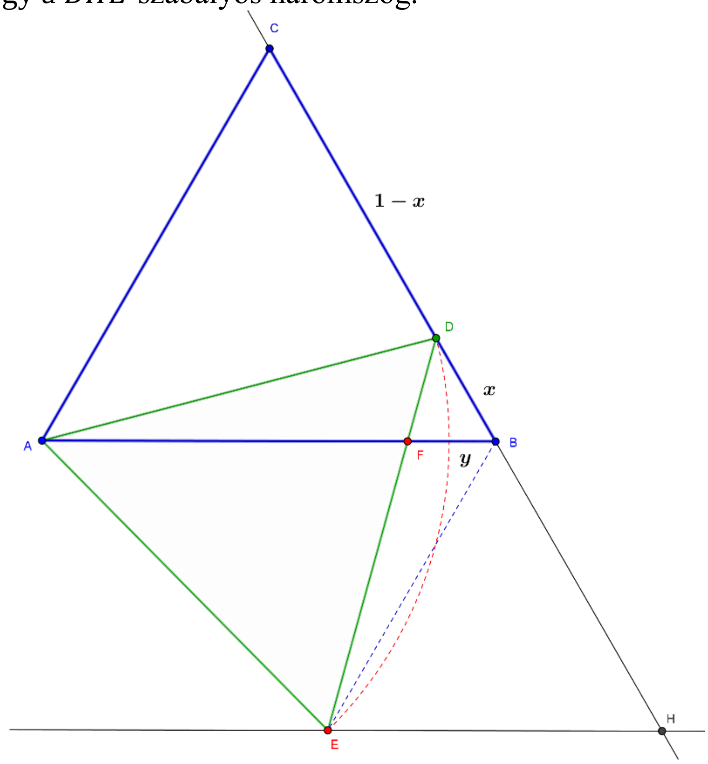
$$log_{\sqrt{5}} \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$ <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

5. Az egységnyi oldalhosszúságú ABC szabályos háromszög BC oldalának tetszőleges belső pontja D. Forgassa el a D pontot az A körül 60°-kal negatív irányba, a kapott pont legyen E.
Legyen továbbá az AB és DE egyenesek közös pontja F.
Határozza meg az AF szakasz hosszának minimális értékét!

<u>1. Megoldás:</u>
Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát (2. ábra), amelyen párhuzamost húztunk az E ponton keresztül AB-vel, a párhuzamos és a CB egyenes metszéspontja H. 1 pont

Igazolni fogjuk, hogy a BHE szabályos háromszög.



2. ábra

A C és D pontok A pont körüli negatív irányú 60°-os elforgatottja rendre B és E, ezért a CB egyenes elforgatott képe a BE egyenes, a két egyenes ezért 60°-os szöget zár be egymással, vagyis $EBH\measuredangle = 60°$.

Ugyanakkor a $BHE\measuredangle$ és $CBA\measuredangle$ szögek a HE és BA egyenesek párhuzamossága miatt egyállású szögek, ezért $BHE\measuredangle = 60°$.

Ezekből az következik, hogy a BHE háromszög harmadik szöge is 60°-os, tehát a háromszög valóban szabályos. 1 pont

A $BD = x$ jelöléssel $CD = 1 - x$, és mivel a CD szakasz A körüli megadott irányú és szögű elforgatottja BE, ezért $BE = 1 - x$.

Mivel a BHE háromszög szabályos, ezért az is igaz, hogy

$$BH = HE = 1 - x.$$ 1 pont

Felírhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a BF és HE párhuzamosokkal metszett $EDH\measuredangle$-re:

$$\frac{BF}{HE} = \frac{DB}{DH}.$$ 1 pont

A DH szakasz hossza egységnyi, mert $DH = DB + BH = x + 1 - x = 1$. 1 pont
Innen a $BF = y$ jelöléssel

$$\frac{y}{1-x} = \frac{x}{1}.$$

A kapott egyenletből $y = x \cdot (1 - x)$ következik. 1 pont

A nyilvánvalóan pozitív x és $1 - x$ számokra felírható a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség:

$$\sqrt{x \cdot (1-x)} \leq \frac{x + 1 - x}{2},$$ 1 pont

azaz

$$\sqrt{x \cdot (1-x)} \leq \frac{1}{2}$$

ahonnan

$$x \cdot (1-x) \leq \frac{1}{4},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 1 - x$, vagyis ha

$$x = \frac{1}{2}.$$ 1 pont

Az AF szakasz hossza pontosan akkor minimális, ha az $y = BF$ szakasz hossza maximális, a maximum értéke

$$y_{max} = \frac{1}{4},$$

ezért

$$AF_{min} = \frac{3}{4}.$$ 1 pont

Az AF szakasz hosszának minimuma tehát $\frac{3}{4}$ és ez pontosan akkor valósul meg, ha a D pont a BC szakasz felezőpontja. 1 pont

Összesen: 10 pont

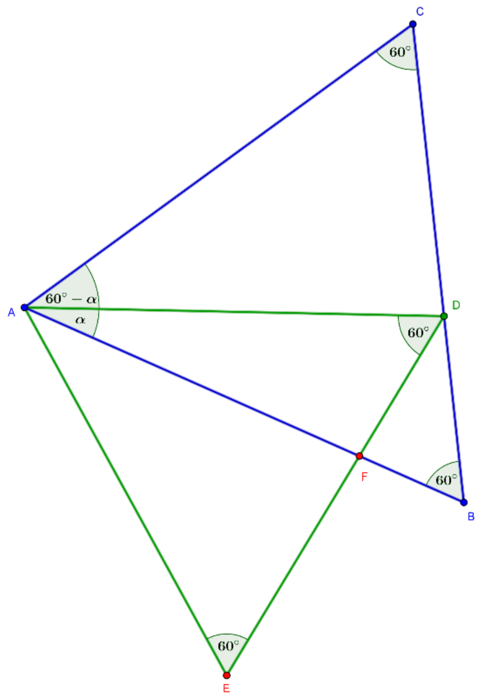
Megjegyzés:
Az $y = x \cdot (1 - x) = -x^2 + x$ kifejezés maximumának helye és értéke meghatározható az

$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

átalakítás segítségével is.

2. megoldás:

Az elforgatás tulajdonsága miatt $AD = AE$, és mivel $DAE\sphericalangle = 60°$, ezért az ADE háromszög szabályos (3. ábra). 1 pont



3. ábra

Az ábrán a $DAB\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel azt kapjuk, hogy $DAC\sphericalangle = 60° - \alpha$, ezért az ADC, BDF illetve ADF háromszögekben rendre

$$CDA\sphericalangle = 60° + \alpha,$$

$$BDF\sphericalangle = 60° - \alpha,$$

illetve

$$DFA\sphericalangle = 120° - \alpha.$$ 1 pont

A fentiek miatt az ABD háromszögben

$$ADB\sphericalangle = 120° - \alpha.$$

Felírjuk a szinusztételt az ABD háromszögben:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{sin60°}{sin(120° - \alpha)},$$

mivel azonban $AB = 1$, ezért az AD szakasz hosszának mértéke

(1) $$AD = \frac{sin60°}{sin(120° - \alpha)}.$$ 2 pont

Felírjuk a szinusztételt az ADF háromszögben is:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{sin60°}{sin(120° - \alpha)},$$

ahonnan (1) segítségével és a műveletek elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$AF = \left(\frac{sin60°}{sin(120° - \alpha)}\right)^2. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel

$$sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ezért

$$AF = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{sin^2(120° - \alpha)}. \qquad \text{1 pont}$$

Ebből az következik, hogy az AF szakasz hossza akkor minimális, ha

$$\frac{1}{sin^2(120° - \alpha)}$$

minimális, ez pedig éppen akkor áll fenn, ha $sin^2(120° - \alpha)$ a legnagyobb, azaz, ha

(2) $$sin^2(120° - \alpha) = 1. \qquad \text{1 pont}$$

A (2) egyenlőségből $sin\ (120° - \alpha) = 1$, vagy $sin\ (120° - \alpha) = -1$ következik.

Ugyanakkor $sin\ (120° - \alpha) = -1$ nem lehetséges, mert $0° < \alpha < 60°$, így csak

$$sin\ (120° - \alpha) = 1$$

fordulhat elő. 1 pont

Az $0° < \alpha < 60°$ feltételt figyelembe véve eszerint $120° - \alpha = 90°$, azaz

$$\alpha = 30°.$$

Eredményünk azt jelenti, hogy a feladat feltételei mellett az AF szakasz minimális hossza

$$AF_{min} = \frac{3}{4},$$

és ez a BC szakasz különböző helyzetű belső D pontjait tekintve pontosan akkor következik be, ha az AD szakasz szögfelezője a $BAC\measuredangle$-nek, ekkor AD merőlegesen felezi a BC szakaszt. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az ADC és DFB háromszögek hasonlók, a megfelelő oldalak arányából (az első megoldáshoz hasonlóan) $AF = 1 - BF = 1 - BD \cdot CD$ következik.