



Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Egy húrtrapéz pontosan három oldalának hosszúsága egyenlő, a negyedik oldal hossza eltér a többitől. Tudjuk, hogy a kétféle oldalhossz összege 50 cm , a húrtrapéz területe 375 cm^2 . Mekkora a húrtrapéz oldalai?

Megoldás:

A húrtrapéz párhuzamos oldalai nem lehetnek egyenlők, mert akkor a négyszög paralelogramma lenne, és ebben az esetben nem lehetne pontosan három azonos hosszúságú oldala.

1 pont

Jelöljük a trapéz három, egyenlő hosszúságú oldalának hosszát b -vel, ekkor a negyedik, b -től különböző hosszúságú oldal hossza legyen a , a feltétel szerint ezek összege

$$a + b = 50\text{ cm}.$$

A trapéz magasságát m -mel jelölve a trapéz területe

$$\frac{a + b}{2} \cdot m = 375\text{ cm}^2.$$

Innen $a + b = 50$ beírásával azt kapjuk, hogy

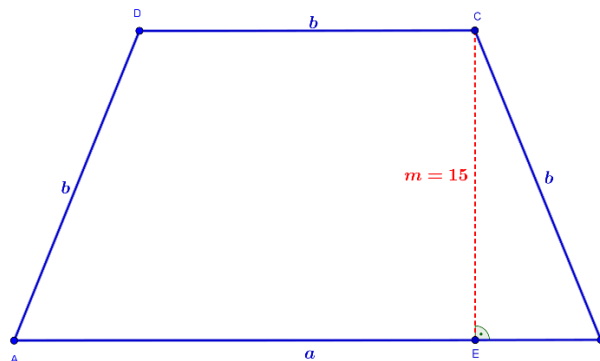
$$m = 15\text{ cm}.$$

2 pont

Az a és b hosszúságok különbözők, ezért $a > b$, vagy $a < b$ lehetséges.

1 pont

Ha $a > b$, akkor a csak a trapéz hosszabbik párhuzamos oldala lehet (1. ábra).



1. ábra

Az 1. ábra BCE derékszögű háromszögében

$$BE = \frac{a - b}{2} = \frac{50 - 2b}{2} = 25 - b. \quad 1 \text{ pont}$$

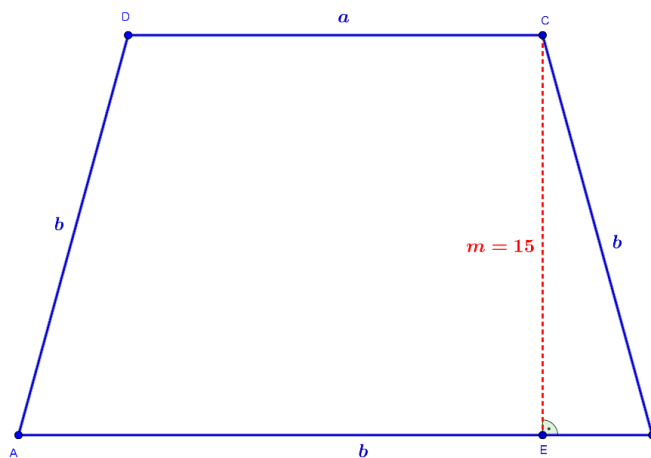
Felírjuk a Pitagorasztétel a BCE derékszögű háromszögre:

$$15^2 + (25 - b)^2 = b^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $b = 17 \text{ cm}$, és ezért $a = 33 \text{ cm}$.

A húrtrapéz három oldala tehát $b = 17 \text{ cm}$, a negyedik oldala pedig $a = 33 \text{ cm}$ hosszúságú. 1 pont

Vizsgáljuk meg az $a < b$ esetet is (2. ábra). Ekkor az a hosszúságú szakasz csak a trapéz rövidebb párhuzamos oldala lehet.



2. ábra

A fenti gondolatmenet szerint

$$BE = \frac{b - a}{2} = \frac{2b - 50}{2} = b - 25. \quad 1 \text{ pont}$$

A Pitagorasztételt a BCE derékszögű háromszögre alkalmazva:

$$15^2 + (b - 25)^2 = b^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $b = 17 \text{ cm}$ és ezért $a = 33 \text{ cm}$. 1 pont

Ez azonban az $a < b$ feltétel miatt nem állhat fenn. 1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk és azt kaptuk, hogy a feltételeknek egyetlen trapéz felel meg, ennek párhuzamos oldalai $AB = 33 \text{ cm}$, $CD = 17 \text{ cm}$, a trapéz szarvai $BC = DA = 17 \text{ cm}$ hosszúságúak. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a $BE = \frac{|b-a|}{2}$ jelöléssel az $a < b$ és $a > b$ esetek egyszerre tárgyalhatók.

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az

$$\begin{aligned} 5x + 8 \cdot \sqrt{xy} + 5y &= 113 \\ (2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{y}) &= 56 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 0$ és $y \geq 0$.

1 pont

Az első egyenlet más alakba írásából következik, hogy

$$(1) \quad 5 \cdot (x + y) + 8 \cdot \sqrt{xy} = 113.$$

A második egyenletből a műveletek elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$2x + 2y + 5 \cdot \sqrt{xy} = 56,$$

ahonnan

$$(2) \quad 2 \cdot (x + y) + 5 \cdot \sqrt{xy} = 56.$$

1 pont

Alkalmazzuk az $a = x + y$ és $b = \sqrt{xy}$ helyettesítéseket, ezekkel az (1) és (2) egyenletekből az

$$(3) \quad \begin{aligned} 5a + 8b &= 113, \\ 2a + 5b &= 56 \end{aligned}$$

elsőfokú egyenletrendszerhez jutunk.

2 pont

A (3) egyenletrendszert a behelyettesítő, vagy az egyenlő együtthatók módszerével megoldva az

$$a = 13, b = 6$$

megoldást kapjuk.

2 pont

Eszerint $x + y = 13$ és $\sqrt{xy} = 6$, utóbbiból négyzetre emeléssel $xy = 36$ következik.

Mivel $y = 13 - x$, ezért $x \cdot (13 - x) = 36$, ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel adódik, hogy

$$(4) \quad x^2 - 13x + 36 = 0.$$

A (4) egyenlet megoldásai $x_1 = 4$ és $x_2 = 9$.

Innen $y = 13 - x$ -ből azonnal következik, hogy $y_1 = 9$ és $y_2 = 4$.

2 pont

Az egyenletrendszer megoldásai tehát az $x_1 = 4, y_1 = 9$ és $x_2 = 9, y_2 = 4$ számpárok.

1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek a számpárok a kiinduló egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégítik, ezért valóban megoldásai a feladatnak.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzés: mivel $x \geq 0, y \geq 0$, ezért $x = \sqrt{x^2}$ és $y = \sqrt{y^2}$, ezért bevezethetjük a $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$ jelöléseket, innen az $5a^2 + 8ab + 5b^2 = 113, 2a^2 + 5ab + 2b^2 = 56$ egyenletrendszert kapjuk, amelyet megoldva $a = 2, b = 3$ vagy $a = 3, b = 2$ adódik.

3. Egy labdarúgó csapat 11 játékosának magasságmérését végzi a csapat orvosa. Az első játékos magasságánál 1 cm -rel *kisebb* az első két játékos átlagmagassága, viszont az első két játékos átlagmagasságánál 1 cm -rel *nagyobb* az első három játékos átlagmagassága. Az első három játékos átlagmagasságánál 1 cm -rel *kisebb* az első négy játékos átlagmagassága, és így tovább. Mekkora a legmagasabb játékos magassága, ha a legalacsonyabb játékos éppen 174 cm -es?

1. Megoldás:

Legyen a mérési sorrendben első játékos testmagassága $x\text{ cm}$.

Ekkor a feladat feltétele szerint az első két játékos magasságának átlaga $x - 1\text{ cm}$. 1 pont

Ez pontosan azt jelenti, hogy a sorrendben második játékos magassága $x - 2\text{ cm}$, hiszen

$$\frac{x + (x - 2)}{2} = x - 1. \quad 1 \text{ pont}$$

A feltételből következik, hogy az első három játékos átlagmagassága $x\text{ cm}$, ami csak úgy lehetséges, hogy a harmadik játékos magassága $x + 2\text{ cm}$, mert

$$\frac{x + (x - 2) + (x + 2)}{3} = \frac{3x}{3} = x. \quad 1 \text{ pont}$$

Ennek megfelelően a negyedik játékos magassága $x - 4\text{ cm}$ kell legyen, és a feltételekből az is következik, hogy az ötödik játékos magassága $x + 4\text{ cm}$. 2 pont

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy a hatodik és hetedik játékos magassága $x - 6\text{ cm}$, illetve $x + 6\text{ cm}$, míg nyolcadik és kilencedik játékos magassága $x - 8\text{ cm}$, valamint $x + 8\text{ cm}$, végül a tizedik és tizenegyedik játékos magassága $x - 10\text{ cm}$, illetve $x + 10\text{ cm}$. 1 pont

Ezekből következik, hogy a legalacsonyabb játékos magassága $x - 10\text{ cm}$, ő áll a mérési sor utolsó előtti helyén. 2 pont

A feladat feltétele volt, hogy a legalacsonyabb játékos 174 cm -es, ezért $x - 10 = 174\text{ cm}$, ahonnan $x = 184\text{ cm}$ következik. 1 pont

A legmagasabb játékos magassága viszont $x + 10\text{ cm}$, ez $x = 184\text{ cm}$ alapján azt jelenti, hogy a legmagasabb játékos 194 cm -es. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az első néhány játékos magassága egyenletrendszer megoldásával is kiszámítható.

Legyenek a mérési sorrendben vett magasságok rendre: $h_1, h_2, h_3, \dots, h_{11}$. 1 pont

A feltételek alapján:

$$h_1 - 1 = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Ebből az egyenletből azt kapjuk, hogy

$$(1) \quad h_2 = h_1 - 2. \quad \text{2 pont}$$

A feladat feltételei szerint az is teljesül, hogy

$$\frac{h_1 + h_2}{2} + 1 = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3},$$

ahonnan $h_2 = h_1 - 2$ behelyettesítésével

$$(2) \quad h_3 = h_1 + 2. \quad \text{2 pont}$$

Felírhatjuk a feladat feltételeinek megfelelő többi egyenletet is, amelyekből az (1) és (2) összefüggésekhez hasonlóan valamennyi mért magasságot kifejezhetjük h_1 -gyel, ezek a következők:

$$\begin{aligned} h_4 &= h_1 - 4, h_5 = h_1 + 4, \\ h_6 &= h_1 - 6, h_7 = h_1 + 6, \\ h_8 &= h_1 - 8, h_9 = h_1 + 8, \\ h_{10} &= h_1 - 10, \text{ végül } h_{11} = h_1 + 10. \end{aligned} \quad \text{2* pont}$$

Nyilvánvaló, hogy a legalacsonyabb játékos magassága $h_{10} = h_1 - 10$, ő áll a mérési sor utolsó előtti helyén.

A feladat feltétele szerint a legalacsonyabb játékos 174 cm-es, ezért

$$h_{10} = h_1 - 10 = 174 \text{ cm},$$

ahonnan egyszerű számolással adódik, hogy $h_1 = 184 \text{ cm}$, tehát a mérési sorban első játékos magassága 184 cm. 1 pont

Az is nyilvánvaló, hogy a mérési sorrendben utolsó játékos magassága a legnagyobb, mert $h_{11} = h_1 + 10$.

A legmagasabb játékos magassága tehát $h_{11} = 194 \text{ cm}$. 2 pont

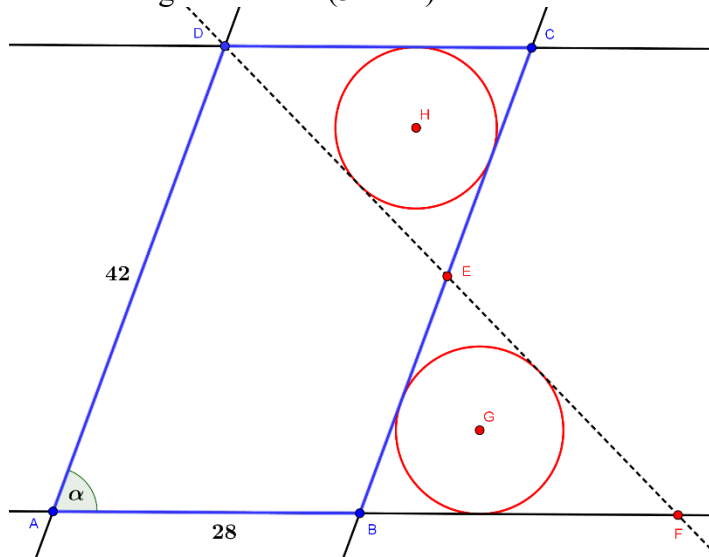
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a 2* pontot akkor is megkaphatja a versenyző, ha a h_2 és h_3 magasságok h_1 -gyel való kifejezése után nem oldja meg mindegyik egyenletet, de felismeri és megindokolja a $h_{2n} = h_1 - 2n$ és $h_{2n+1} = h_1 + 2n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) összefüggéseket.

4. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 28$ egység és $AD = 42$ egység. A D pontot a BC oldal E pontjával összekötő egyenes és az AB egyenes metszéspontja F . Tudjuk, hogy az $ABED$ négyszögbe kör írható, valamint azt, hogy a BFE és az EDC háromszögek beírt köreinek sugara megegyezik. Határozza meg a $\angle DAB$ nagyságát!

Megoldás:

Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát (3. ábra).



3. ábra

A BFE és az EDC háromszögekben $\angle BEF = \angle CED$ mert csúcsszögek, ugyanakkor a CD és BF oldalak párhuzamossága miatt $\angle FBE = \angle ECD$, illetve $\angle BFE = \angle EDC$, mert ezek a szögpárok váltószögek.

Ezeket felhasználva a BFE és az EDC háromszögek megfelelő szögeinek nagysága egyenlő, tehát a két háromszög hasonló.

1 pont

A feltételek alapján azt is tudjuk, hogy a BFE és az EDC háromszögek G , illetve H középpontú beírt köreinek sugara egyenlő, ez pedig a két háromszög hasonlósága alapján azt is jelenti, hogy a háromszögek egybevágók.

2 pont

Ebből következik, hogy $BE = CE$, ezért az E pont a BC szakasz felezőpontja.

1 pont

Az $ABCD$ paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért $BC = 42$ egység, így

$$BE = CE = 21 \text{ egység.}$$

2* pont

A feladat feltételéből tudjuk, hogy az $ABED$ négyszögbe kör írható, ez a négyszög tehát érintőnégyyszög. Teljesül rá az érintőnégyyszögek tulajdonsága, vagyis az, hogy szemközti oldalai hosszának összege egyenlő. Az érintőnégyyszögek tulajdonsága alapján:

$$BE + AD = AB + DE.$$

Ebből a $BE = 21$, $AD = 42$ és $AB = 28$ értékek behelyettesítése után

$$DE = 35 \text{ egység}$$

adódik.

1 pont

Az EDC háromszögben tehát $DE = 35$ egység, $CD = 28$ egység, továbbá $CE = 21$ egység.

$CE = 3 \cdot 7$, $CD = 4 \cdot 7$ és $DE = 5 \cdot 7$ alapján vegyük észre, hogy

$$CE^2 + CD^2 = DE^2,$$

1 pont

ebből a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint az következik, hogy az EDC háromszög derékszögű, mégpedig

$$\angle DCE = 90^\circ.$$

1* pont

Az $ABCD$ paralelogramma szemközti szögei egyenlők, ezért $\angle DCE = \angle DAB$, így azt kapjuk, hogy

$$\angle DAB = 90^\circ.$$

Ezzel azt is beláttuk, hogy az $ABCD$ paralelogramma téglalap.

1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

- a versenyző a 2* pontot akkor is megkapja, ha a következőkre hivatkozik: a BFE és EDC háromszögek egybevágósága miatt $BF = 28$ egység, tehát B az AF szakasz felezőpontja. Ugyanakkor $BE \parallel AD$, ezért az FAD háromszög középvonala BE , a középvonal tulajdonsága miatt pedig BE hossza az AD szakasz hosszának fele, tehát $BE = 21$ egység, és így $CE = 21$ egység
- a versenyző az 1* pontot nem kaphatja meg, ha a Pitagorasz-tétel megfordítása helyett a Pitagorasz-tételre hivatkozik
- a $\angle DAB$ az FAD háromszögre alkalmazott koszinusztétellel is kiszámolható

5. Valaki 1-től indulva összeadta a pozitív egész számokat és eredményül 2016-ot kapott. Utólag rájött, hogy az összeadás során tévedett. Az egyik számban felcserélte az egyesek és a tízesek helyén álló két különböző számjegyet, amelyek közül pontosan az egyik prímszám, és az így kapott számmal végezte az összeadást. Meddig adta össze a számokat és melyik számot rontotta el?

Megoldás:

Legyen a feltételek szerint a helyes összegben szereplő, a számjegyek felcserélésével elrontott, legalább kétjegyű szám A , ebben a tízesek és az egyesek helyén álló számjegyek legyenek rendre a és b .

Ekkor az A szám felírható

$$A = B + 10a + b$$

alakban, ahol B az utolsó két számjegy levágásával keletkező szám, ez a szám 0 is lehet.

Ha az A számban felcseréljük az a és b számjegyeket, akkor az így kapott A' szám a következőképpen írható fel:

$$A' = B + 10b + a. \quad 1 \text{ pont}$$

Ha a pozitív egész számokat 1-től kiindulva egy bizonyos pozitív egész számig összeadjuk, akkor a kétféle összeg különbsége éppen

$$(1) \quad A' - A = 9 \cdot (b - a)$$

lesz. 1 pont

Az (1) különbség legfeljebb 81 lehet, mivel a és b különböző számjegyek, továbbá a hibás és a helyes összeg különbsége (1) szerint 9-cel osztható. 1 pont

A fentiek szerint az összeadás helyes összege ezért a 2016-tól legfeljebb 81-gyel térhet el és a különbség 9-cel osztható, vagyis, ha a helyes összeget S -sel jelöljük, akkor

$$(2) \quad 1935 \leq S \leq 2097, \quad 1 \text{ pont}$$

ahol $S \in N$.

Ha az összeadás 1-től kiindulva 61-ig történt volna, akkor az összeg

$$\frac{1 + 61}{2} \cdot 61 = 1891$$

lett volna, ez (2) szerint nem lehetséges. Hasonlóképpen nem történhetett az összeadás 61-nél kisebb számig sem.

Ha az összeadás 1-től kiindulva 65-ig történt volna, akkor az összeg

$$\frac{1 + 65}{2} \cdot 65 = 2145$$

lett volna, ez (2) miatt szintén nem lehetséges. Ugyancsak nem történhetett az összeadás 65-nél nagyobb számig sem.

Az eddigiek szerint az összeadás 1-től kiindulva 62-ig, 63-ig, vagy 64-ig történt. 1 pont

Az összeadás nem valósulhatott meg 1-től kiindulva 64-ig, mert akkor az összeg

$$\frac{1 + 64}{2} \cdot 64 = 2080$$

lett volna, amelynek a 2016-tól való eltérése 64, de ez a különbség 9-cel nem osztható.

Ha 1-től 63-ig adta volna össze a pozitív egész számokat, az összeg éppen 2016 lenne, azaz nem lett volna számjegycsere. 1 pont

Az egyetlen lehetséges eset, ha 1-től 62-ig történt az összeadás.

Ekkor a helyes összeg

$$\frac{1 + 62}{2} \cdot 62 = 1953$$

értéket ad, ez 63-mal kevesebb, mint a 2016, és ez a különbség 9-cel osztható. 1 pont

Ez pedig (1) alapján azt jelenti, hogy a hibás és helyes összeg különbsége $A' - A = 9 \cdot (b - a) = 63$, így

(3) $b - a = 7$. 1 pont

Figyelembe véve, hogy a feltétel szerint az elrontott szám egyik számjegye prím, a (3) összefüggés a $b = 9, a = 2$ vagy a $b = 7, a = 0$ számpárokra áll fenn. 1 pont

Ugyanakkor a $b = 7, a = 0$ számpár nem megoldása a feladatnak, mert az ezekből képzett, és a helyes összegben szereplő $10a + b$ szám nem kétjegyű.

Eszerint az összeadás 1-től 62-ig történt, az elrontott szám a 29-es volt, és a hibás összeadáskor 29 helyett 92 hozzáadása valósult meg, így alakult ki a hibás 2016-os összeg. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: eredményünk szerint az összeadás során egyjegyű és kétjegyű számok összeadása történt, ezért az $A = B + 10a + b$ illetve $A' = B + 10b + a$ egyenletekben szereplő B számra nyilvánvalóan $B = 0$ teljesül.

6. Bizonyítsa be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\sqrt{1 - \cos 2\alpha} + \sqrt{1 - \cos 2\beta} > \sqrt{1 - \cos 2\gamma}$$

1. Megoldás:

Ismert trigonometrikus azonosságot alkalmazva

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \cdot \sin^2 \alpha, \quad 1 - \cos 2\beta = 2 \cdot \sin^2 \beta, \quad \text{illetve} \quad 1 - \cos 2\gamma = 2 \cdot \sin^2 \gamma. \quad 1 \text{ pont}$$

Ezekkel az átalakításokkal a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$(1) \quad \sqrt{2\sin^2 \alpha} + \sqrt{2\sin^2 \beta} > \sqrt{2\sin^2 \gamma}. \quad 2 \text{ pont}$$

A négyzetgyök tulajdonsága alapján (1) átalakítható:

$$(2) \quad \sqrt{2} \cdot |\sin \alpha| + \sqrt{2} \cdot |\sin \beta| > \sqrt{2} \cdot |\sin \gamma|,$$

ezért (2) a bizonyítandóval ekvivalens egyenlőtlenség. 1 pont

Mivel α, β, γ egy háromszög szögei, ezért $\sin \alpha, \sin \beta$ és $\sin \gamma$ pozitív számok, így (2) mindkét oldalának $\sqrt{2}$ -vel való osztása után az egyenlőtlenséget az abszolút-érték jele nélkül is felírhatjuk, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$(3) \quad \sin \alpha + \sin \beta > \sin \gamma. \quad 2 \text{ pont}$$

A pozitív $\sin \gamma$ tényezővel osztva (3) mindkét oldalát:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} > 1$$

a bizonyítandó. 1 pont

Legyenek a háromszög α, β, γ szögeivel szemben levő oldalak hosszúságai rendre a, b, c .

Felírjuk a szinusztételt, amely szerint $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$, valamint $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$, és így az

$$(4) \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} > 1$$

bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

A (4) egyenlőtlenségből a pozitív c számmal történő szorzás után kapjuk, hogy

$$a + b > c,$$

ez pedig a minden háromszögre igaz háromszögegyenlőtlenség. 1 pont

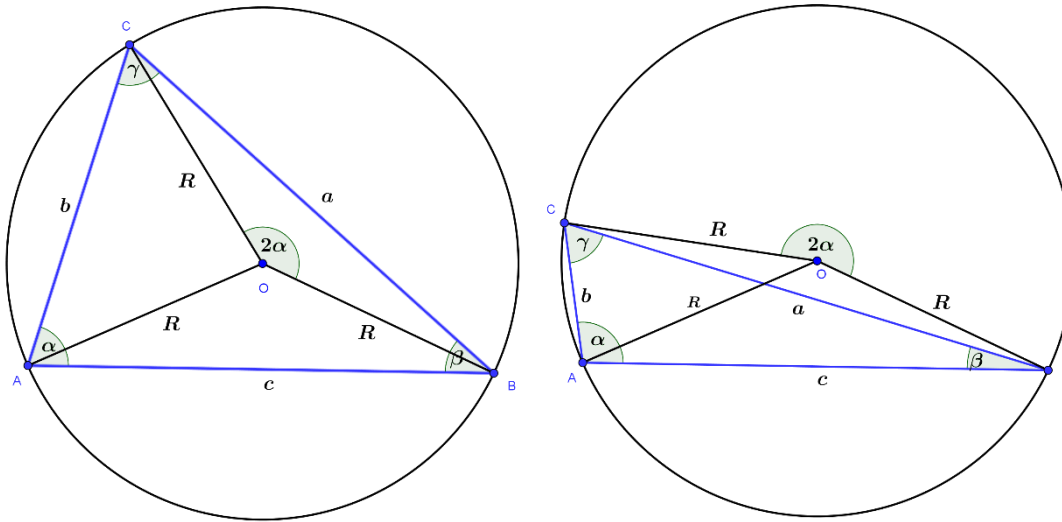
Átalakítási lépéseink megfordíthatók voltak, tehát a kiindulási egyenlőtlenség igaz. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Legyen R a háromszög körülírt körének sugara, az α, β, γ szögekkel szemközi oldalak hossza rendre a, b, c .

A háromszög α szöge lehet hegyesszög, tompaszög, vagy derékszög, az első két esetet a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra

A kerületi és középponti szögek összefüggése szerint az a oldalhoz tartozó középponti szög 2α . 1 pont

A 4. ábra OBC háromszögeiben felírva a koszinusztételt:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 2\alpha,$$

illetve

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(360^\circ - 2\alpha). \quad \text{1 pont}$$

Mindkét egyenlet az

$$(1) \quad a^2 = 2R^2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

egyenletre vezet, hiszen egy trigonometriai azonosság szerint $\cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha$. 2 pont

Nyilvánvaló, hogy $a > 0$ és $R > 0$, ezért (1) szerint $1 - \cos 2\alpha > 0$, így

$$(2) \quad a = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos 2\alpha}. \quad \text{2 pont}$$

Végül, ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $a = 2R$.

A (2) összefüggés azonban ekkor is fennáll, hiszen $2\alpha = 180^\circ$,

ezért $\cos 2\alpha = \cos 180^\circ = -1$, és így $a = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2R$ valóban igaz. 1 pont

A (2)-höz hasonlóan adódnak a

$$(3) \quad b = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos 2\beta}$$

és

$$(4) \quad c = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos 2\gamma}$$

összefüggések is.

1 pont

Írjuk most föl a minden háromszögre érvényes háromszög-egyenlőtlenséget:

$$(5) \quad a + b > c.$$

1 pont

Helyettesítsük az (5) egyenlőtlenségbe az a, b, c oldalhosszakra vonatkozó (2), (3) és (4) eredményeket, ezzel

$$R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos 2\alpha} + R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos 2\beta} > R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos 2\gamma},$$

ahonnan a nyilván pozitív $R \cdot \sqrt{2}$ tényezővel való osztással kapjuk a bizonyítandó

$$\sqrt{1 - \cos 2\alpha} + \sqrt{1 - \cos 2\beta} > \sqrt{1 - \cos 2\gamma}$$

egyenlőtlenséget.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzések:

- a háromszögegyenlőtlenség miatt nyilvánvaló, hogy nem állhat fenn egyenlőség
- a fentiekhez teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy tetszőleges háromszögben a

$$\sqrt{1 - \cos 2\alpha} + \sqrt{1 - \cos 2\gamma} > \sqrt{1 - \cos 2\beta}$$

és

$$\sqrt{1 - \cos 2\beta} + \sqrt{1 - \cos 2\gamma} > \sqrt{1 - \cos 2\alpha}$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek