A 2015/2016. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy részhalmazát kicsinek nevezzük, ha üres vagy kevesebb eleme van a legkisebb eleménél. Adott n-re hány kicsi részhalmaz van?

2. Anna tetszőlegesen beosztja az $n+1\,, n+2\,, \ldots\,, n+2k$ számokat k darab diszjunkt párba. Ezután megmondja Balázsnak, mennyi az egyes párokban az elemek szorzata. Legyen $f(n)$ az a maximális k, amelyre ebből a k darab szorzatértékből Balázs mindig ki tudja találni az Anna által gondolt számpárokat. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan c és d, az n-től független pozitív konstansok, hogy minden elég nagy n-re
$$c\sqrt{n} \;<\; f(n) \;<\; d\sqrt{n}\,.$$

3. Az ABC háromszög A-val átellenes oldalán felvettük az A_1 pontot, a B-vel átellenes oldalon B_1-et, a C-vel átellenesen C_1-et úgy, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok áthaladnak ugyanazon a P ponton. Bizonyítsuk be, hogy
$$AP \cdot PA_1 + BP \cdot PB_1 + CP \cdot PC_1 \;<\; \frac{1}{3}\left(BC^2 + CA^2 + AB^2\right).$$