Oktatási Hivatal

A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

döntő forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Adott három egymástól és nullától különböző számjegy, melyekből elkészítjük az összes lehetséges tízes számrendszerbeli háromjegyű számot.
Azt tapasztaljuk, hogy a kapott háromjegyű számok közül a két legnagyobb szám összege 1444.
Határozza meg a három számjegyet!

1. Megoldás: jelölje a három számjegyet $a;b;c$.
Mivel a számjegyek különbözők, föltehetjük, hogy $a > b > c > 0$. 1 pont

Ekkor a két legnagyobb háromjegyű szám az $\overline{abc}$ és az $\overline{acb}$, továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\overline{abc} > \overline{acb}.$$ 1 pont

A feltétel szerint $\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$, ezért $\overline{abc} > \overline{acb}$ alapján azt kapjuk, hogy

(1) $$2 \cdot \overline{abc} > 1444 \text{ és } 2 \cdot \overline{acb} < 1444.$$ 2 pont

Az (1) összefüggésekből adódik, hogy

(2) $$\overline{abc} > 722 \text{ és } \overline{acb} < 722.$$

A (2) eredmények szerint csak $a = 7$ lehetséges. 2 pont

Ekkor viszont $\overline{acb} < 722$ miatt $c \le 2$.
A $c = 2$ esetben a feltételek figyelembe vételével csak $b = 1$ lenne lehetséges, de ez ellentmond a $b > c$ egyenlőtlenségnek. Mivel a számjegyek mindegyike pozitív, ezért csak $c = 1$ állhat fenn. 1 pont

Az $a = 7$ és $c = 1$ eredmények és az $\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$ feltétel miatt

(3) $$(700 + 10b + 1) + (700 + 10 + b) = 1444 \text{ .}$$

A (3) egyenletből egyszerű számolással adódik, hogy $b = 3$. 1 pont

Ezért a keresett három számjegy: $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$. 1 pont

Az $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$ számjegyekből összesen hat háromjegyű, különböző jegyekből álló számot készíthetünk, ezek közül a két legnagyobb az $\overline{abc} = 731$ és az $\overline{acb} = 713$, ezek összege valóban 1444. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: jelölje a három számjegyet $a; b; c$.
A számjegyek különbözők, ezért föltehetjük, hogy $a > b > c > 0$. 1 pont

Ekkor a két legnagyobb háromjegyű szám az $\overline{abc}$ és az $\overline{acb}$, amelyek összege a feltétel szerint:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444 \text{ ,}$$

azaz

(1) $$200a + 11 \cdot (b + c) = 1444 \text{ .}$$ 2 pont

Az (1) egyenletből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy $11 \cdot (b + c) - 44 = 200 \cdot (7 - a)$,

illetve

(2) $$11 \cdot (b + c - 4) = 200 \cdot (7 - a).$$ 2 pont

A (2) egyenlet bal oldala osztható 11-gyel, így a vele egyenlő jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie 11-gyel.
Mivel azonban a 11 és 200 számok relatív prímek, ezért csak a jobb oldalon szereplő $7 - a$ kifejezés lehet 11-gyel osztható. 1 pont

Figyelembe véve, hogy a tízes számrendszerbeli számjegy, a $7 - a$ kifejezés csak akkor lehet 11-gyel osztható, ha $a = 7$, ekkor $7 - a = 0$. 1 pont

Ez azt is jelenti, hogy a (2) egyenlet mindkét oldalának értéke zérus.
Ebből pedig az következik, hogy

$$b + c - 4 = 0,$$

vagyis

(3) $$b + c = 4.$$ 1 pont

A feltételek szerint b és c különböző pozitív számjegyek, továbbá kezdeti feltevésünk szerint $b > c$, így (3)-ból azt kapjuk, hogy csak

$$b = 3; c = 1$$

lehetséges.

Ezért a keresett három számjegy: $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$. 1 pont

Az $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$ számjegyekből összesen hat háromjegyű, különböző jegyekből álló számot készíthetünk, ezek közül a két legnagyobb az $\overline{abc} = 731$ és az $\overline{acb} = 713$, ezek összege valóban 1444. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>3. Megoldás:</u> jelölje a három számjegyet $a; b; c$.
A számjegyek különbözők, ezért föltehetjük, hogy $a > b > c > 0$. 1 pont

Ekkor a két legnagyobb háromjegyű szám az $\overline{abc}$ és az $\overline{acb}$, amelyek összege a feltétel szerint:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444,$$

a helyiértékek figyelembe vételével

(1) $$200a + 11 \cdot (b + c) = 1444.$$ 1 pont

Mivel $a; b; c$ különböző számjegyek, amelyek közül a a legnagyobb, továbbá $200 \cdot 8 > 1444$, ezért

(2) $$a \le 7.$$ 2 pont

Ebből az $a > b > c > 0$ feltétel miatt

(3) $$b + c \le 5 + 6,$$

azaz $11 \cdot (b + c) \le 121$, ebből pedig (1) miatt $200a \ge 1444 - 121$, vagyis $a \ge \frac{1323}{200}$ következik. 1 pont

Számolással ellenőrizhetjük, hogy $6 < \frac{1323}{200} < 7$, és mivel az a szám az $0 < a \le 9$ feltételeknek megfelelő pozitív egész, továbbá $a \ge \frac{1323}{200}$, ezért

(4) $$a \ge 7.$$ 1 pont

A (2) és (4) összefüggések együttesen azt jelentik, hogy csak

$$a = 7$$

lehetséges. 1 pont

A kapott értéket az (1) egyenletbe helyettesítve és az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$b + c = 4,$$

amelyből $b > c$ miatt csak

(5) $$b = 3; c = 1$$

következhet. 1 pont

A keresett három számjegy tehát: $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$. 1 pont

Az $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$ számjegyekből összesen hat háromjegyű, különböző jegyekből álló számot készíthetünk, ezek közül a két legnagyobb az $\overline{abc} = 731$ és az $\overline{acb} = 713$, ezek összege valóban 1444. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Legyenek $p; t; r$ pozitív prímszámok.
Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja $a_1 = -r$, differenciája $d = 7t$.
Határozza meg a $p;t;r$ prímszámokat, ha teljesül, hogy

$$a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r \text{ !}$$

<u>1. Megoldás:</u> a számtani sorozat első három tagja a sorozat képzési szabálya szerint

$$a_1 = -r \text{, } a_2 = -r + d = -r + 7t \text{ és } a_3 = -r + 2d = -r + 14t \text{.}$$ 1 pont

Ezeket beírhatjuk az $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ összefüggésbe:

(1) $$-r \cdot p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t \cdot r + (-r + 14t) \cdot r \cdot p = 7t \cdot p \cdot t \cdot r \text{.}$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a pozitív r számmal, ekkor azt kapjuk, hogy

$$-p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t + (-r + 14t) \cdot p = 7t^2 \cdot p \text{,}$$

innen a zárójelek felbontásával adódik $13p \cdot t = 7t^2 \cdot p - 7t^2 + r \cdot p + r \cdot t$, ebből pedig egyszerű átalakításokkal:

(2) $$13p \cdot t = 7t^2 \cdot (p-1) + r \cdot (p+t) \text{.}$$ 1 pont

A $p;t$ prímszámok nem lehetnek egyszerre páratlanok, mert akkor (2) bal oldala páratlan, míg jobb oldala páros szám lenne. 2 pont

Ezért három esetet kell megvizsgálnunk:

a) a $p;t$ prímszámok mindegyike páros, azaz $p = 2; t = 2$,

b) a p prím páros, vagyis $p = 2$, a t prímszám páratlan,

c) a t prím páros, vagyis $t = 2$, a p prímszám páratlan. 1 pont

Az a) esetben a $p = 2; t = 2$ értékeket (2)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $r = 6$, ez azonban nem prímszám, ezért a feladat feltételei mellett az a) eset nem fordulhat elő. 1 pont

A b) esetben a $p = 2$ számot a (2) egyenletbe írva $26t = 7t^2 + r \cdot (2+t)$, ahonnan rendezéssel és szorzattá alakítással:

(3) $$t \cdot (26 - 7t) = r \cdot (2+t) \text{.}$$

A (3) egyenlet jobb oldala pozitív, ezért a bal oldalnak is pozitívnak kell lennie, ez azonban 3-nál nagyobb t prímekre már nem teljesül.

Figyelembe véve, hogy a b) esetben a t prímszám páratlan, csak $t = 3$ lehetséges.
Ha $t = 3$, akkor (3)-ból egyszerű számolással kapjuk, hogy $r = 3$. 1 pont

A c) esetben a $t = 2$ számot a (2) egyenletbe helyettesítve $26p = 28 \cdot (p-1) + r \cdot (p+2)$, ahonnan rendezéssel kapjuk, hogy:

(4) $$28 = 2p + r \cdot (p+2).$$

A (4) egyenletben a bal oldal páros szám, ezért a jobb oldalnak is páros számnak kell lennie, ez azonban csak úgy lehet, ha az $r \cdot (p+2)$ tényező páratlan.

Mivel a c) esetben a p prímszám páratlan, ezért $p+2$ is páratlan, tehát az r prímszámnak szükségképpen párosnak kell lennie, azaz $r = 2$.

Az $r = 2$ számot a (4) egyenletbe írva egyszerű számolással adódik, hogy $p = 6$.
Ez nyilván nem megoldása a feladatnak, hiszen $p = 6$ nem prímszám. 1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, azt kaptuk, hogy a feltételeknek csak a

$$p = 2; t = 3; r = 3$$

prímszámok felelnek meg. 1 pont

Számolással ellenőrizve ezekre a prímszámokra a feladatbeli számtani sorozat különbsége $d = 21$, első három tagja $a_1 = -3; a_2 = 18; a_3 = 39$, és ezeket a számokat a $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe írva mindkét oldal értéke 378. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: a számtani sorozat első három tagja a sorozat képzési szabálya szerint

$$a_1 = -r\,,\ a_2 = -r + d = -r + 7t \text{ és } a_3 = -r + 2d = -r + 14t\,.$$

Ezeket beírva a feltételként szolgáló $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe,

$$-r \cdot p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t \cdot r + (-r + 14t) \cdot r \cdot p = 7t \cdot p \cdot t \cdot r\,,$$

innen a pozitív r számmal az egyenlet mindkét oldalát osztva és a kapott egyenletet rendezve

(1) $$13p \cdot t = 7t^2 \cdot (p-1) + r \cdot (p+t).$$ 2 pont

A $p; t; r$ prímszámok paritása szerint 8 esetet kell megvizsgálnunk.

Ezek az esetek a következők:

a) mindhárom prímszám páratlan,

b) mindhárom prímszám páros, azaz $p = 2; t = 2; r = 2$,

c) p páros prím, azaz $p = 2$, $t; r$ páratlan prímek,

d) t páros prím, azaz $t = 2$, $p; r$ páratlan prímek,

e) r páros prím, azaz $r = 2$, $t; p$ páratlan prímek

f) $p; t$ páros prímek, azaz $p = 2; t = 2$, r páratlan prím,

g) $p; r$ páros prímek, azaz $p = 2; r = 2$, t páratlan prím,

h) $t; r$ páros prímek, azaz $t = 2; r = 2$, p páratlan prím. 2 pont

Az a) és az e) eset nem valósulhat meg, mert ha a $p; t$ prímszámok mindegyike páratlan, akkor (1) bal oldala páratlan szám, míg a jobb oldal két zárójeles kifejezése páros szám, ezért a jobb oldal is páros lenne.

A b) eset sem állhat fenn, mert a $p = 2; t = 2; r = 2$ számok behelyettesítése esetén a bal oldal értéke 52, míg a jobb oldal értéke 36. 1 pont

A c) esetben $p=2$ behelyettesítése után (1)-ből azt kapjuk, hogy $26t=7t^2+r\cdot(2+t)$, illetve rendezés és kiemelés után

(2) $$t\cdot(26-7t)=r\cdot(2+t).$$

A (2) egyenlet jobb oldala pozitív, ezért a bal oldalnak is pozitívnak kell lennie, ez azonban 3-nál nagyobb t prímekre már nem teljesül.
Mivel a c) esetben a t prímszám páratlan, csak $t=3$ lehet. Ebből (2) alapján azt kapjuk, hogy $r=3$. 1 pont

A d) esetben, amikor $t=2$, és $p;r$ páratlan prímek, az egyenlet két oldalának paritása eltérő, mégpedig a bal oldal páros, a jobb oldal páratlan. Ezért a d) eset nem állhat fenn.

Az f) esetben, amikor $p=2; t=2$, és r páratlan prím, akkor ezeknek az értékeknek az (1) egyenletbe való beírásával arra az eredményre jutunk, hogy

$$r=6,$$

ez azonban nem prímszám, ezért a feladat feltételei mellett az f) eset sem lehetséges. 1 pont

A g) esetben, amikor $p;r$ páros prímek, vagyis $p=2; r=2$, és t páratlan prím, behelyettesítés után azt kapjuk, hogy a bal oldal értéke páros, míg a jobb oldal páratlan pozitív egész szám, ezért ez az eset sem valósulhat meg.

Végül a h) esetben, mikor $t=2; r=2$, és p páratlan prím, a $t=2; r=2$ értékeket (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$p=6,$$

de ez nem prímszám, így a h) eset sem állhat fenn. 1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk és azt az eredményt kaptuk, hogy a feladat minden feltételét csak a c) esetben kapott

$$p=2; t=3; r=3$$

prímszámok elégítik ki. 1 pont

Számolással ellenőrizve ezekre a prímszámokra a feladatbeli számtani sorozat különbsége $d=21$, első három tagja $a_1=-3; a_2=18; a_3=39$, ezeket a számokat a $a_1\cdot p\cdot t+a_2\cdot t\cdot r+a_3\cdot r\cdot p=d\cdot p\cdot t\cdot r$ egyenletbe írva mindkét oldal értéke 378. 1 pont

Összesen: 10 pont

<u>3. Megoldás:</u> a számtani sorozat első három tagja a sorozat képzési szabálya szerint

$$a_1=-r\,,\ a_2=-r+d=-r+7t \text{ és } a_3=-r+2d=-r+14t\,.$$

Ezeket beírva a feltételként szolgáló $a_1\cdot p\cdot t+a_2\cdot t\cdot r+a_3\cdot r\cdot p=d\cdot p\cdot t\cdot r$ egyenletbe,

$$-r\cdot p\cdot t+(-r+7t)\cdot t\cdot r+(-r+14t)\cdot r\cdot p=7t\cdot p\cdot t\cdot r\,,$$

innen a pozitív r számmal az egyenlet mindkét oldalát osztva és a kapott egyenletet rendezve

(1) $$7t^2-7p\cdot t^2-t\cdot r+13p\cdot t=p\cdot r\,.$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a pozitív t számmal:

(2) $$7t-7p\cdot t-r+13p=\frac{p\cdot r}{t}\,.$$ 2 pont

A (2) egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldalnak is egész számnak kell lennie.
Ez csak úgy lehetséges, ha a t pozitív prím osztója a p és r pozitív prímek szorzatának, de ez csak akkor állhat fenn, ha

$$t=p \text{ vagy } t=r\,,$$

a továbbiakban ezt a két esetet vizsgáljuk. 2 pont

Ha $t=p$, akkor a (2) egyenletből behelyettesítés, rendezés és szorzattá alakítás után azt kapjuk, hogy $t\cdot(-7t+20)=2r$, a kapott egyenlet mindkét oldalát a pozitív t számmal osztva pedig

(3) $$-7t+20=\frac{2r}{t}\,.$$ 1 pont

A (3) egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldal csakis úgy lehet egész szám, ha a t pozitív prím osztója a 2 és r prímszámok szorzatának, vagyis, ha

$$t=2 \text{ vagy } t=r\,.$$ 1 pont

A $t=2$ értéket (3)-ba helyettesítve $r=6$ adódik, ez nem felel meg a feladat feltételeinek, hiszen $r=6$ nem prímszám.

A $t=r$ behelyettesítésével pedig azt kapjuk, hogy $t=\frac{18}{7}$, ez nem felel meg a feltételeknek, tehát nem megoldása a feladatnak. 1 pont

Végül, ha $t = r$, akkor a (2) egyenletbe helyettesítve, rendezve, szorzattá alakítás után azt kapjuk, hogy $p \cdot (7t - 12) = 6t$, a kapott egyenlet mindkét oldalát a pozitív p számmal osztva

(4) $$7t - 12 = \frac{6t}{p}.$$

A (4) egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldal csakis úgy lehet egész szám, ha a p pozitív prím osztója a $6t = 2 \cdot 3 \cdot t$ szorzatnak, és mivel p pozitív prím, ezért csak

$$p = 2;\ p = 3;\text{ vagy } p = t$$

lehetséges. 1 pont

Ezek közül a $p = t$ feltételt nem szükséges újra elemeznünk, mert az előbbiekben láttuk, hogy ebből nem kapunk a feltételeknek megfelelő $p; t; r$ számhármast.

Ha $p = 2$, akkor a (4) egyenletből azt kapjuk, hogy $t = 3$, így a $t = r$ figyelembe vételével kapott $p = 2; t = 3; r = 3$ számhármas kielégíti a feladat feltételeit.

Ha $p = 3$, akkor (4) szerint $t = \frac{12}{5}$, ez nyilván nem megoldása a feladatnak.

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, azt az eredményt kaptuk, hogy a feladat minden feltételét csak a

$$p = 2; t = 3; r = 3$$

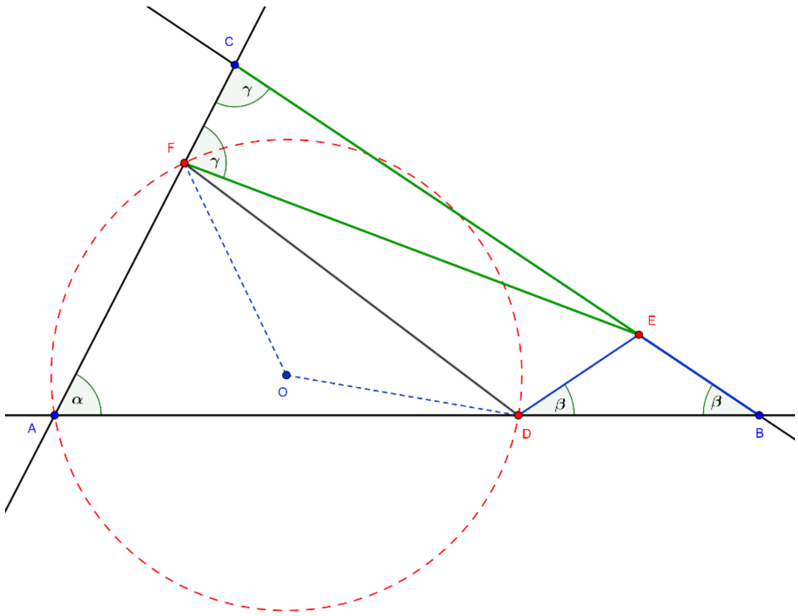
prímszámok elégítik ki. 1 pont

Számolással ellenőrizve ezekre a prímszámokra a feladatbeli számtani sorozat különbsége $d = 21$, első három tagja $a_1 = -3; a_2 = 18; a_3 = 39$, ezeket a számokat a $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe írva mindkét oldal értéke 378. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Az ABC hegyesszögű háromszög $AB; BC$ és CA oldalain úgy vettük fel a $D; E$ és F belső pontokat, hogy $DE = BE$ és $FE = CE$.
Igazolja, hogy az ADF háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik a $DEF\angle$ szögfelezőjére!

<u>Megoldás:</u> készítsünk a feladat feltételeinek megfelelő ábrát (1. ábra).



1. ábra 1 pont

Legyenek az ABC háromszög $A; B; C$ csúcsoknál levő belső szögei rendre $\alpha; \beta; \gamma$.

Mivel a feltételek miatt $DE = BE$ és $FE = CE$, ezért az 1. ábra BDE és CFE háromszögei egyenlő szárú háromszögek, amelyekben a BD és CF alapokon fekvő szögek rendre β és γ. 2 pont

A BDE és CFE háromszögekben a szárak szögei

(1) $$BED\angle = 180° - 2\beta \text{ és } CEF\angle = 180° - 2\gamma .$$

Nyilvánvaló, hogy $BED\angle + CEF\angle + FED\angle = 180°$, ezért az (1) összefüggés alapján

$$180° - 2\beta + 180° - 2\gamma + FED\angle = 180°,$$

amiből rendezés után azt kapjuk, hogy $FED\angle = 2\beta + 2\gamma - 180°$

(2) $$FED\angle = 2 \cdot (\beta + \gamma) - 180° .$$ 2 pont

A háromszög belső szögeinek összege $180°$, ezért $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, és így (2)-ből

(3) $$FED\angle = 180° - 2\alpha$$

következik. 1 pont

Az ADF háromszög köré írt körben a $DAF\angle = \alpha$ szög az A pontot nem tartalmazó DF ívhez tartozó kerületi szög.

A kerületi és középponti szögek összefüggése szerint ehhez az ívhez

$$DOF\angle = 2\alpha$$

nagyságú középponti szög tartozik. 1 pont

Eredményünk és a (3) összefüggés szerint a $DEFO$ négyszögben két szemben levő szög összege

$$FED\angle + DOF\angle = 180° - 2\alpha + 2\alpha = 180°,$$

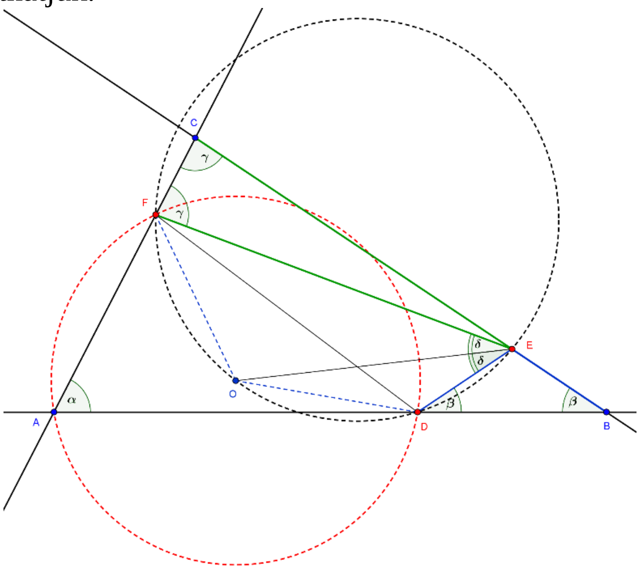
ezért a $DEFO$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

A $DEFO$ négyszögben a DO és FO azonos hosszúságú húrok, hiszen ezek a szakaszok az ADF háromszög körülírt körének sugarai.

A $DEFO$ húrnégyszögben azonos hosszúságú húrokhoz egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért

$$DEO\angle = FEO\angle = \delta,$$

ahogy azt a 2. ábrán láthatjuk. 1 pont



2. ábra

Ez pedig azt jelenti, hogy ADF háromszög körülírt körének O középpontja illeszkedik a $DEF\angle$ szögfelezőjére, és éppen ezt akartuk bizonyítani. 1 pont

Összesen: 10 pont