A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATOK

1. A 2015 olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek és közülük pontosan kettő prímszám. Hány ilyen négyjegyű természetes szám van?

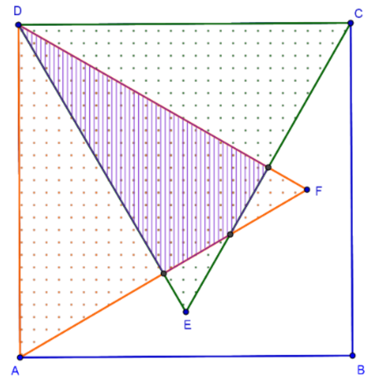
2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az $x + y^2 = \frac{1}{2}$, $x^2 + 2y = -\frac{7}{4}$ egyenletrendszert!

3. A BC átfogójú ABC derékszögű háromszög AB befogójának A pontból induló félegyenesén megjelöljük azt a B_0 pontot, amelyre $AB_0 = 3 \cdot AB$. Azt tapasztaljuk, hogy az ABC és AB_0C háromszögek hasonlók.
Bizonyítsa be, hogy az AB_0C háromszögben CB belső szögfelező!

4. Legyenek a $\frac{p}{p-2} \cdot x^2 + \frac{p-1}{p+1} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$ egyenlet valós gyökei x_1 és x_2.
Határozza meg a $p \neq 0$ valós paraméter mindazon értékeit, amelyekre fennáll, hogy
$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}!$$

5. Az a_n sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 1$, és minden $n \geq 2$ esetén $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}$.
Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyik nagyobb $\frac{1}{100}$-nál?

6. A négyzet alakú $ABCD$ asztallapra két egybevágó szabályos háromszöget terítünk le az ábra szerint (a szabályos háromszögek oldalainak hossza egyenlő a négyzet oldalainak hosszával).
Határozza meg a kétszer lefedett rész területének és a nem fedett rész területének arányát!



Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.