A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

FIZIKA

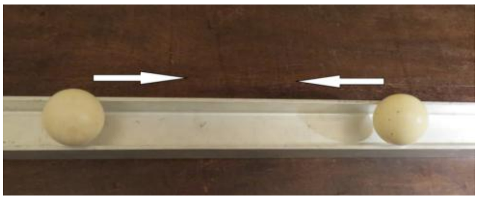
II. KATEGÓRIA

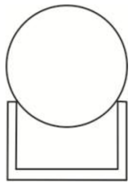
Javítási-értékelési útmutató

1.) *A fényképen látható vízszintes, szögletes U-alakú vályúban két* 5 cm *átmérőjű biliárdgolyó tisztán gördül egymás felé egyforma,* 3 m/s *sebességgel. A golyók ütközése tökéletesen rugalmas, amit úgy kell érteni, hogy a pillanatszerű ütközéskor a golyók sebességet cserélnek, azonban az ütközés során nem változik meg a golyók szögsebessége.*

a) Mekkora legyen a vályú szélessége, hogy a golyók másodszor is ütközzenek?

b) Mekkora sebességgel ütköznek a golyók másodszor, ha a vályú szélessége 4 cm *?*





A jobb oldali ábra az elrendezés elölnézeti metszetét mutatja:

Megoldás:

a) A vályú szélessége legyen 2*l*, a golyók sugara *R* = 2,5 cm. A tiszta gördülés feltétele:

$$v_0 = r\omega_0 = \sqrt{R^2 - l^2}\omega_0.$$

Akkor következik be második ütközés, ha az első ütközés után a súrlódás miatt a golyók sebességváltozása v_0-nál nagyobb lesz. Határesetben vizsgáljuk azt az esetet, amikor a sebességváltozás éppen v_0. A „hátrafelé” mozgó golyót az „előre” mutató súrlódási erő fékezi, és ugyanakkor csökkenti is a szögsebességét. Két egyenletet írhatunk fel:

$$S\Delta t = mv_0$$

$$Sr\Delta t = \theta\omega_0 = \frac{2}{5}mR^2\omega_0 = \frac{2}{5}mR^2\frac{v_0}{r}$$

A két egyenlet összevonásából ezt kapjuk:

$$mv_0 = \frac{2R^2}{5r^2}mv_0\,,$$

illetve az egyszerűsítések után:

$$2R^2 = 5r^2 = 5(R^2 - l^2)\,,$$

amiből

$$l = \sqrt{\frac{3}{5}}R = 0{,}775\,R = 1{,}94\text{ cm}.$$

A vályúnak tehát $2l \approx$ **3,9 cm**-nél szélesebbnek kell lennie ahhoz, hogy a második ütközés is létrejöjjön.

b) A kérdéses sebességet jelöljük v-vel, a vályú megadott szélessége legyen $2l_0 = 4$ cm, a golyók kezdeti megadott sebessége v_0 = 3 m/s. Elegendő egyetlen golyót vizsgálnunk, mert szimmetrikus a mozgás. Az első ütközést követően a tiszta gördülés létrejöttéig a teljes sebességváltozás $v_0 + v$, így a súrlódási erőlökés:

$$S\Delta t = m(v_0 + v).$$

A szögsebesség eközben ω_0-ról $\omega = \frac{v}{r}$ értékűre változik, de nem vált előjelet! A súrlódási erő forgatónyomatékának időbeli hatása változtatja meg a golyó perdületét:

$$Sr\Delta t = \theta(\omega_0 - \omega) = \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_0}{r} - \frac{v}{r}\right),$$

ahol

$$r = \sqrt{R^2 - l_0^2} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Ha a két fenti egyenletet elosztjuk egymással, akkor a következő összefüggésre jutunk:

$$r^2(v_0 + v) = \frac{2}{5}R^2(v_0 - v),$$

amiből a golyók második ütközési sebessége:

$$v = \frac{2R^2 - 5r^2}{2R^2 + 5r^2}v_0 = \frac{1}{19}v_0 \approx 0{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzések:

1. A fenti megoldás is mutatja, hogy a csúszási súrlódás értéke nem befolyásolja az eredményt. Még jobban látszik ez, ha a feladatot perdület-megmaradással oldjuk meg. A vályú fedősíkjának középvonalában lévő bármely pontra nézve a golyó első ütközést követő perdülete nem változik, mert a kétoldali súrlódási erők, illetve nyomóerők forgatónyomaték összege ezekre a pontokra nulla. A perdület pályaperdületből és sajátperdületből tevődik össze, melyek az első ütközés után ellentétes előjelűek.
Ha a teljes perdület az első ütközés után nulla, akkor a golyók a csúszás végén megállnak. Ez a visszafordulás határesete:

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{v_0}{r} - mrv_0 = 0,$$

amiből $r = \sqrt{\frac{2}{5}}R$ adódik az *a)* részre adott megoldással összhangban.
A *b)* részt is megoldhatjuk ugyanígy; ilyenkor a fenti különbség pozitív:

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{v_0}{r} - mrv_0 = \frac{2}{5}mR^2\frac{v}{r} + mrv,$$

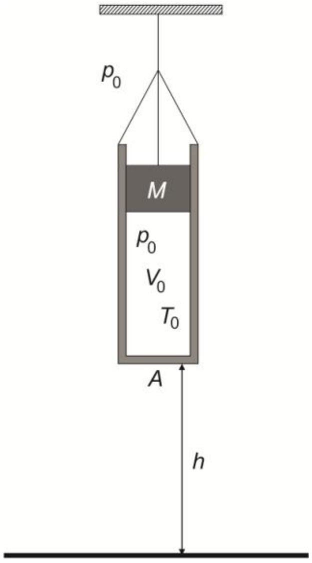
amiből a fentiekkel megegyező eredményt kapjuk: $v = \frac{2R^2 - 5r^2}{2R^2 + 5r^2}v_0$.

2. Általánosságban megmutatható, hogy a második ütközés ugyanolyan vályúméretek esetén valósul meg akkor is, ha a két golyó nem azonos sebességgel ütközik. Ütközhetnek ellentétes, de akár egyirányú sebességgel is, vagy az egyik golyó állhat az ütközés előtt, ha az $l > \sqrt{\frac{3}{5}}R$ feltétel teljesül, akkor bekövetkezik a második ütközés is.

3. Elvileg végtelen sok ütközés jön létre, azonban a valóságban már a második ütközés is olyan kis sebességgel történik, hogy az eddigiekben elhanyagolt veszteségek (közegellenállás, gördülési ellenállás, nem tökéletesen rugalmas ütközés) miatt csak a második ütközés megfigyelése látványos. Lassított felvételen látszik több ütközés is.

2.) *Hőszigetelő hengerben egy* M = 20 kg *tömegű, könnyen mozgó dugattyú* V_0 = 12 l, T_0 = 300 K *hőmérsékletű,* p_0 = 10^5Pa *nyomású levegőt zár el. Mind a dugattyú, mind a hőszigetelő henger erős fonállal a mennyezetre van felfüggesztve úgy, hogy a henger alja a talajtól* h = 1,5 m-*re van. A henger keresztmetszete* A = 1 dm^2 *területű. Egy adott pillanatban a felfüggesztő fonál elszakad.*

Maximálisan mekkora lesz ennek következtében a bezárt levegő hőmérséklete? (A talajjal való ütközés abszolút rugalmatlan.)



Megoldás: A talajjal való ütközéséig szabadon esik a rendszer, a dugattyú nem mozdul el a hengerhez viszonyítva, a bezárt levegő térfogata nem változik. Az ütközés után a dugattyú az eddig megszerzett sebességével addig süllyed a hengerben, amíg mozgási energiája el nem fogy. A hőszigetelő hengerben adiabatikus állapotváltozás megy végbe. Az erre felírható munkatétel bal oldalán a külső levegő munkája, a nehézségi erő munkája és az összenyomott gáz munkája (ami a belsőenergia megváltozásának mínusz egyszerese) szerepel, jobb oldalán a dugattyú mozgási energiájának megváltozása.

$$p_0\left(V_0-V\right)+\frac{Mg}{A}\left(V_0-V\right)-\frac{f}{2}\left(pV-p_0V_0\right)=0-\frac{1}{2}M\upsilon^2.$$

A folyamat elején a dugattyú mozgási energiája:

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2=Mgh.$$

Átrendezett egyenletünk:

$$Mgh+p_0\left(V_0-V\right)+\frac{Mg}{A}\left(V_0-V\right)-\frac{f}{2}\left(pV-p_0V_0\right)=0. \qquad (1)$$

Két ismeretlenünk van. A megoldáshoz szükséges másik egyenletet az adiabatikus állapotváltozásra felírható összefüggés adja, amiből a nyomást kifejezhetjük:

$$pV^\kappa=p_0V_0^\kappa \quad\rightarrow\quad p=p_0\frac{V_0^\kappa}{V^\kappa}=p_0V_0^\kappa V^{-\kappa}. \qquad (2)$$

(2)-t (1)-be írva:

$$Mgh+p_0\left(V_0-V\right)+\frac{Mg}{A}\left(V_0-V\right)-\frac{f}{2}\left(p_0V_0^\kappa V^{1-\kappa}-p_0V_0\right)=0.$$

Rendezve:

$$Mgh+p_0V_0\left(1+\frac{f}{2}\right)+\frac{Mg}{A}V_0-\left(p_0+\frac{Mg}{A}\right)V-\frac{f}{2}p_0V_0^\kappa V^{1-\kappa}=0.$$

Levegőre f = 5, κ = $(f + 2)/f$ = 1,4. Innen a numerikus értékek behelyettesítésével elvégezve a műveleteket (mértékegységek nélkül) a következő egyenletet kapjuk:

$$4740-120000V-511,44V^{-0,4}=0$$

A bal oldali kifejezést $f_1(V)$-vel jelölve néhány próbálgatással közelítve kapjuk a minimális térfogatot. Kezdve az eredeti térfogat felével:

$f_1(V)$	6.10^{-3}	5.10^{-3}	$5{,}5.10^{-3}$	$5{,}55.10^{-3}$	$5{,}56.10^{-3}$	$5{,}58.10^{-3}$	$5{,}585.10^{-3}$	$5{,}6076.10^{-3}$
	+61,476	–118,001	–18,724	–9,913	–8,174	–4,717	–3,857	+0,0059

A feladatnak igen jó közelítéssel megfelel a V = 5,6 literes végső térfogat. (2) alapján az ehhez tartozó (maximális) nyomás:

$$p=p_0V_0^\kappa V^{-\kappa}=2,90115\cdot10^5\ \text{Pa}\approx2,9\cdot10^5\,\text{Pa}.$$

Az összenyomott levegő maximális hőmérséklete a gáztörvényből:

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{pV}{T} \qquad \to \qquad T=\frac{pV}{p_0V_0}T_0=\mathbf{407\ K}.$$

Megjegyzés: Az (1) egyenletet elosztva p_0V_0-lal, és abban felhasználva a (2) egyenletet, átírható a

$$\frac{f}{2}\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\kappa}-1\right]-\frac{Mg}{p_0V_0}\left[h_0+\frac{V_0}{A}\left(1-\frac{V}{V_0}\right)\right]-\left(1-\frac{V}{V_0}\right)=0$$

alakba. A jobb oldal a dimenziótlan

$$x=\frac{V}{V_0}$$

változó függvénye. A számértékeket behelyettesítve a megoldandó dimenziótlan egyenlet:

$$f_2(x)\equiv\frac{f}{2}\left[x^{\kappa}-1\right]-\frac{Mg}{p_0V_0}\left[h_0+\frac{V_0}{A}(1-x)\right]-(1-x)=0.$$

A keresett gyöknek az $x\in(0,1]$ tartományba kell esnie, mivel x = 0: zéró térfogatúra nyomódott össze a gáz, x = 1: semennyire sem nyomódott össze a gáz. A felírt alakból látszik, hogy

$$\lim_{x\to 0} f_2(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f_2(x)=-\frac{Mgh}{p_0V_0},$$

azaz $f_2(x)$ az intervallum két szélén ellentétes előjelű, így lesz gyök a [0,1] intervallum belsejében. A numerikus értékeket beírva (g = 10 m/s^2-et véve) a megoldandó egyenlet most

$$f_2(x)=-3,95+\frac{2,5}{x^{0,4}}+1.2x=0.$$

A számközfelező módszerrel vagy egyéb módon megoldva az egyenletet a gyök:

$$x = 0,467297.$$

Így $$V=V_0\cdot x=5,60757\ \text{l}\approx 5,6\ \text{l}.$$

Az adiabatikus változásra érvényes $TV^{\kappa-1}=T_0V_0^{\kappa-1}$ egyenletből

$$T=T_0\cdot x^{1-\kappa}=406,709\ \text{K}\approx 407\ \text{K}.$$

Egyezésben a fentiekkel, a végső nyomás pedig

$$p=p_0x^{-\kappa}=2,90115\cdot 10^5\,\text{Pa}\approx 2,9\cdot 10^5\,\text{Pa}.$$

***3.)** Függőleges helyzetű, henger alakú mágnesrúd inhomogén mágneses mezőt hoz létre. A mágneses indukció nagysága a mágnesrúd alatt a tengelyen a rúd végétől mért h távolsággal lineárisan változik:*

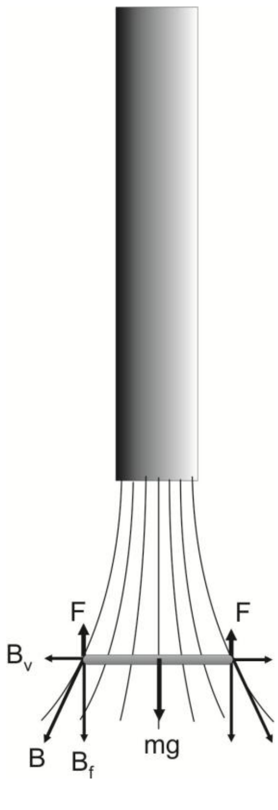
$$B(h) = B_0(1 - a \cdot h),$$

ahol B_0 és a konstansok. A mágnesrúd szimmetriatengelyén, a rúd alatt bizonyos távolságban elhelyezünk egy kicsiny, vékony, vezető anyagból készült gyűrűt, amelyben I erősségű áram folyik. A gyűrű síkja merőleges a mágnesrúd tengelyére, átmérője d, tömege m.

Mekkora lehet a gyűrűben folyó áram erőssége, hogy a gyűrű függőleges gyorsulása közelítőleg nulla legyen, azaz lebegjen?

1. megoldás:

Az indukció csökkenése az indukcióvonalak ritkulását jelenti, vagyis azok „kifelé" görbülnek. Az inhomogén mezőtől származó erőnek van egy radiális komponense (a függőleges irányú B miatt), amely feszíti a gyűrűt, de lesz egy függőleges erő is, ami a **B** vízszintes komponense miatt lép föl. Ez a függőleges irányú Lorentz-erő tart egyensúlyt a nehézségi erővel és okozza a gyűrű lebegését.



A mágneses indukcióvektor B_v vízszintes komponensét a mágneses tér forrásmentességének segítségével lehet megadni. Eszerint a mágneses indukció fluxusa zárt felületre nulla (azaz nincs mágneses töltés). Írjuk föl a fluxust h távolságra a mágnesrúd alatt egy d átmérőjű, Δh magasságú lapos kicsiny hengerre, amelynek szimmetriatengelye egybeesik a mágnes és gyűrű szimmetriatengelyével, és $\Delta h << d$.

A fluxus a fedőlapra:

$$\Phi_1 = -B(h)\,\pi\frac{d^2}{4} = -B_0(1 - ah)\,\pi\frac{d^2}{4},$$

mivel az erővonalak a henger belseje felé haladnak.

A fluxus az alaplapra

$$\Phi_2 = B(h + \Delta h)\,\pi\frac{d^2}{4} = B_0(1 - ah - a\Delta h)\,\pi\frac{d^2}{4}.$$

A paláston átmenő fluxus

$$\Phi_p = B_v\,\pi d\,\Delta h$$

Vegyük figyelembe, hogy a teljes fluxus nulla, azaz $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_p = 0$, amiből

$$B_v = B_0\,\frac{a \cdot d}{4}.$$

A köráramra ható függőleges irányú mágneses erő nagysága

$$F = B_v\,I\,\pi d$$

A lebegés feltétele, hogy $F = mg$, amiből

$$I = \frac{4mg}{B_0 a d^2 \pi} = \frac{mg}{B_0 a A},$$

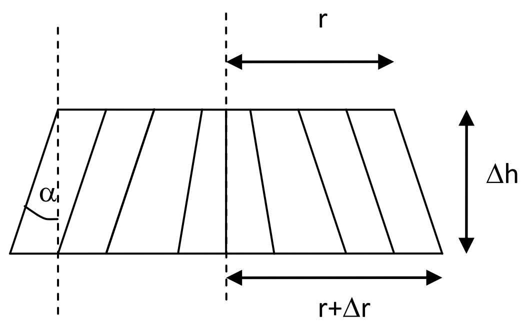
ahol $A = \dfrac{d^2\pi}{4}$ a gyűrű területe.

2. megoldás

Az indukció csökkenése az indukcióvonalak ritkulását jelenti, vagyis azok „kifele" görbülnek. Az inhomogén mezőtől származó erőnek van egy radiális komponense (a függőleges irányú B miatt), amely feszíti a gyűrűt, de lesz egy függőleges erő is, ami a **B** vízszintes komponense miatt lép föl. Ez a függőleges irányú Lorentz-erő tart egyensúlyt a nehézségi erővel és okozza a gyűrű lebegését.

A B vonalak kicsit hajlanak kifelé, így a tengellyel bezárt α szög kicsiny. A mágneses indukció-vektor vízszintes összetevője $B_v = B \sin \alpha$. Meg kell határozni az α szöget.

Tekintsünk h távolságra egy kicsiny r sugarú körfelületet, amely merőleges a tengelyre, középpontja a tengelyen van, és amelyen bizonyos meghatározott számú erővonal halad át. Mivel az erővonalak kifelé görbülnek, ugyanennyi erővonal $h+\Delta h$ távolságban egy $r+\Delta r$ sugarú körön halad át, azaz az r sugarú körön és az $r+\Delta r$ sugarú körön áthaladó fluxus ugyanakkora:



$$B(h) \cdot r^2 \pi = B(h+\Delta h) \cdot (r+\Delta r)^2 \pi.$$

Beírva a mágneses indukció távolságfüggését kapjuk, hogy

$$(1 - ah)r^2 = (1 - ah - a\Delta h)[r^2+2r\Delta r+(\Delta r)^2]$$

Hanyagoljuk el a másodrendűen kicsiny tagokat: $(\Delta r)^2 \approx 0$, $\Delta h \Delta r \approx 0$, így kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta r}{\Delta h} = \frac{ar}{2(1-ah)}.$$

Az ábra szerint ez éppen tg α. A mágneses indukció vektor vízszintes komponense

$$B_v = B \sin \alpha \approx B \operatorname{tg} \alpha = B_0 \frac{a \cdot r}{2}.$$

A köráramra ható függőleges irányú mágneses erő nagysága

$$F = B_v I \pi 2r$$

A lebegés feltétele, hogy $F = mg$, amiből

$$I = \frac{mg}{B_0 a A},$$

ahol $A = r^2 \pi$ a gyűrű területe.

3. megoldás (nem középiskolai**):**

Inhomogén mágneses mezőben egy $\boldsymbol{\mu}$ mágneses momentumra ható erő $\mathbf{F}$ = grad ($\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$). Egy köráram mágneses momentumának nagysága $\mu = I A$, és iránya merőleges a köráram síkjára, azaz a feladat szerint a rúd tengelyével párhuzamos. A tengelyen a mágneses momentum és B iránya párhuzamos. Az erő függőleges, mert a gradiensnek csak a tengely irányú komponense nem nulla:

$$F = \mu \cdot \frac{dB}{dh} = I \cdot A \cdot B_0 \cdot a$$

(előjelekkel nem foglalkozva).

Ez az erő tart egyensúlyt az mg nehézségi erővel, így $I = \dfrac{mg}{B_0 a A}$.

Értékelési útmutató

1. feladat

A vályú szélességének meghatározása	12 pont
A második ütközés sebességének meghatározása	8 pont
	Összesen: 20 pont

2. feladat

Annak észrevétele, hogy a folyamat első fázisában súlytalanság állapotban van a rendszer	2 pont
A munkatétel helyes felírása	5 pont
Az adiabatikus állapotegyenlet helyes alkalmazása	5 pont
A transzcendens egyenlet helyes felírása	4 pont
A numerikus megoldás	4 pont
	Összesen: 20 pont

3. feladat

Annak fölismerése, hogy a függőleges irányú erő, amely a gyűrű lebegését okozza, *B* vízszintes komponensétől származik	5 pont
A mágneses indukció vízszintes komponensének meghatározása	10 pont
A függőleges irányú Lorentz-erő meghatározása	3 pont
Az áram meghatározása	2 pont
	Összesen: 20 pont

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.