Oktatási Hivatal

A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATOK

1. A 257 olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek. Ha a számjegyeket fordított sorrendben leírjuk, akkor az eredetinél nagyobb számot kapunk, a 752-t.
Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű szám van?

2. Az a valós paraméter mely értékeire lesz az
$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$
egyenletnek pontosan egy valós megoldása?

3. Messe az AB átmérőjű k_1 kört a C és D pontokban az A középpontú k_2 kör. A k_2 körnek az AB átmérőre eső pontja legyen E! Válasszuk ki a k_2 körnek az ABC háromszög belsejébe eső CE körívén az ív egy tetszőleges M belső pontját! A BM egyenes és a k_1 kör másik metszéspontját jelöljük N-nel!
Bizonyítsa be, hogy
$$MN^2=CN\cdot DN!$$

4. Milyen a valós paraméter esetén lesz pontosan két valós gyöke a
$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-(a+2)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2a=0$$
egyenletnek a $[0;2\pi]$ intervallumban?

5. Az $ABCD$ tetraéder belsejében vegyünk fel egy P pontot, majd kössük össze a tetraéder csúcsaival. Az $AP;BP;CP$ és DP egyenesek szemközti oldallapokon lévő döféspontjai rendre: $A_1;B_1;C_1$ és D_1.
Bizonyítsa be, hogy
$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PD_1}{DD_1}=1!$$

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.