Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011/2012
Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Az 1. (iskolai) forduló feladatainak megoldása

1. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$(x-3)^4+(x-5)^4=82$$

egyenletet!

1. megoldás:

Alkalmazzuk az

$$a=x-4$$

helyettesítést!

Ezzel az egyenlet a következő alakban írható:

(1) $$(a+1)^4+(a-1)^4=82\,.$$ 3 pont

A hatványozás elvégzése és az összevonások után a

$$2a^4+12a^2+2=82\,,$$

majd rendezés után az

(2) $$a^4+6a^2-40=0$$

egyenletet kapjuk. 2 pont

Az $y=a^2$ helyettesítéssel (2)-ből az

$$y^2+6y-40=0$$

másodfokú egyenlet adódik, melynek gyökei

$$y_1=4 \text{ és } y_2=-10\,.$$ 1 pont

Az $y=a^2$ miatt $y_2=-10$ nem megoldás. 1 pont

Az $y_1=4$-ből pedig

$$a_1=2$$

vagy

$$a_2=-2\,.$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy $a=x-4$, az $a_1=2$-ből kapjuk, hogy

$$x_1=6\,,$$

továbbá $a_2=-2$-ből kapjuk, hogy

$$x_2=2\,.$$ 1 pont

Az $(x-3)^4+(x-5)^4=82$ egyenlet gyökei tehát az $x_1=2$ és $x_2=6$ valós számok. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. <u>megoldás:</u>

Észrevesszük, hogy $3^4+1^4=82$, ezért az egyenlet átírható az

$$\left[(x-3)^4-3^4\right]+\left[(x-5)^4-1^4\right]=0$$

alakba. 1 pont

Az $a^4-b^4=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2-b^2\right)$ azonosság alapján az egyenlet

$$\left[(x-3)^2+9\right]\cdot\left[(x-3)^2-9\right]+\left[(x-5)^2+1\right]\cdot\left[(x-5)^2-1\right]=0$$

alakra hozható, innen pedig a műveletek elvégzésével az

(1) $$\left(x^2-6x+18\right)\cdot\left(x^2-6x\right)+\left(x^2-10x+26\right)\cdot\left(x^2-10x+24\right)=0$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

Mivel $x^2-6x=x\cdot(x-6)$ és $x^2-10x+24=(x-6)\cdot(x-4)$,

ezért (1)-ből

$$\left(x^2-6x+18\right)\cdot x\cdot(x-6)+(x-6)\cdot(x-4)\cdot\left(x^2-10x+26\right)=0,$$

majd az $x-6$ tényező kiemelhető.

(2) $$(x-6)\cdot\left(2x^3-20x^2+84x-104\right)=0.$$ 1 pont

A (2) egyenlet szerint

$$x-6=0,$$

vagy

$$2x^3-20x^2+84x-104=0.$$ 1 pont

Ha $x-6=0$, akkor $x_1=6$, és ez az egyenlet egyik valós megoldása. 1 pont

Ha

$$2x^3-20x^2+84x-104=0,$$

akkor egyszerűsítés után

$$x^3-10x^2+42x-52=0,$$

ez pedig újabb szorzattá bontás után:

(3) $$(x-2)\cdot\left(x^2-8x+26\right)=0.$$ 1 pont

A (3) egyenletből

$$x-2=0$$

vagy

$$x^2-8x+26=0.$$ 1 pont

Ha $x-2=0$, akkor $x_2=2$, és ez megoldása a kiinduló egyenletnek. 1 pont

Az $x^2-8x+26=0$ másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív. ($D=64-104=-40$) 1 pont

Az $(x-3)^4+(x-5)^4=82$ egyenlet megoldásai tehát csak az $x_1=6$ és $x_2=2$ valós számok, a gyökök helyességét behelyettesítéssel is ellenőrizhetjük. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

2. Egy számsorozatot a következő módon képezünk: legyen

$$a_1 = 1 \text{ és } a_2 = 2,$$

a sorozat további tagjai pedig tegyenek eleget az

$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} - 1 \quad (n \geq 2)$

összefüggésnek.

Mennyi a sorozat első 2011 tagjának az összege?

Megoldás:

A rekurzív képletet átrendezhetjük:

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

1 pont

Mivel $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$, ezért

a sorozat további tagjai kiszámíthatók,

$$a_3 = 3;\ a_4 = 2;\ a_5 = 1;$$

$$a_6 = 1;\ a_7 = 2;\ a_8 = 3;\ a_9 = 2;\ a_{10} = 1 \ldots$$

3 pont

Látjuk, hogy a sorozat periodikus, amelyben az

$$a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3; a_4 = 2; a_5 = 1$$

számötös ismétlődik.

2 pont

Mivel $2011 = 402 \cdot 5 + 1$, ezért 402 teljes periódust kell összeadni, valamint a 403. periódus első tagját:

$$S_{2011} = 402 \cdot (1 + 2 + 3 + 2 + 1) + 1,$$

azaz

$$S_{2011} = 402 \cdot 9 + 1 = 3619.$$

4 pont

Összesen: 10 pont

3. Legyenek m és n pozitív egész számok. Igazolja, hogy

$$\frac{m}{n} < \frac{m^2 + m \cdot n + 2n^2}{m^2 + m \cdot n + n^2}$$

akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$!

Megoldás:

a) Tegyük fel, hogy teljesül az

$$\frac{m}{n} < \frac{m^2 + m \cdot n + 2n^2}{m^2 + m \cdot n + n^2}$$

egyenlőtlenség, és bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$.

Ha ez teljesül az m és n pozitív egész számokra, akkor az az egyenlőtlenség is igaz, amelyet ebből ekvivalens átalakításokkal kapunk. 1 pont

Az egyenlőtlenség $n \cdot \left(m^2 + m \cdot n + n^2\right)$ pozitív számmal való szorzása ekvivalens átalakítás, ezért

$$\mathrm{m}^3 + \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{n} + \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}^2 < \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{n} + \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n}^3,$$ 2 pont

azaz

(1) $$m^3 < 2n^3,$$

amiből $\mathrm{n} > 0$ miatt

(2) $$\left(\frac{m}{n}\right)^3 < 2$$

következik. 2 pont

A köbgyökvonás ekvivalens átalakítás, ezért a (2) egyenlőtlenség egyenértékű az

$$\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$$

egyenlőtlenséggel, tehát feltevésünkből következik. 1 pont

b) Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, a lépések megfordíthatók és így

$$\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$$

-ből következik az

$$\frac{m}{n} < \frac{m^2 + m \cdot n + 2n^2}{m^2 + m \cdot n + n^2}$$

egyenlőtlenség, vagyis a megfordítás is igaz. 3 pont

Ezért

$$\frac{m}{n} < \frac{m^2 + m \cdot n + 2n^2}{m^2 + m \cdot n + n^2}$$

valóban akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

I. megjegyzés: formailag egyszerűsíthető a számolás, ha a törtet egyszerűsítjük $m \cdot n$-nel, és bevezetjük az $\frac{m}{n} = x$ jelölést.

II. megjegyzés: egyik megoldásban sem használtuk ki, hogy m és n pozitív egész számok, csak azt, hogy pozitívok, ezért a feladat állítása tetszőleges m és n pozitív számokra teljesül.

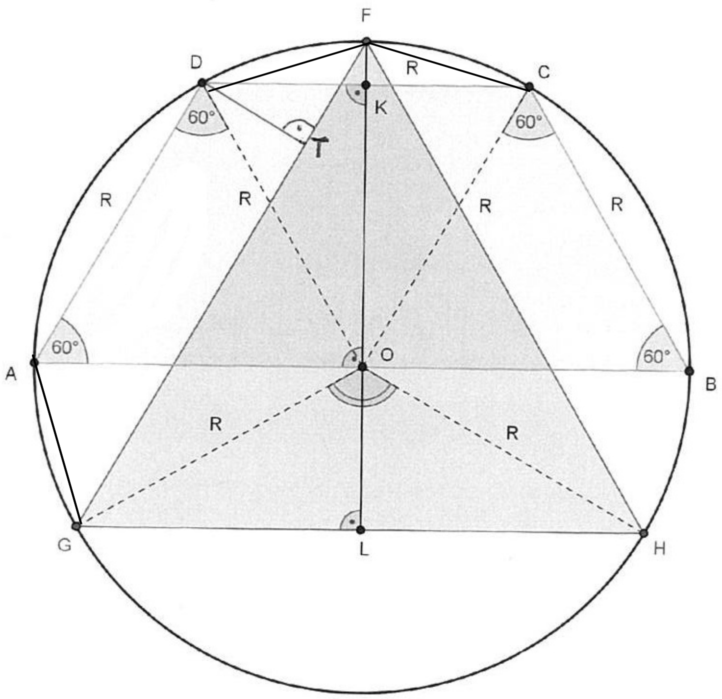
4. Egy R sugarú körbe olyan trapézt írunk, amelynek oldalai R; R; R; $2R$ hosszúságú húrok.

   Az R hosszúságú alaphoz tartozó rövidebb ív F felezőpontjából párhuzamosokat húzunk a trapéz száraival, ezek a kört másodszor a G illetve a H pontokban metszik.

   Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe egyenlő az FGH háromszög területével!

1. megoldás:

A feltételek alapján készítünk egy ábrát.



1. ábra

A trapéz egyik oldala $AB = 2R$, ez az oldal a kör átmérője, tehát az AOD, DOC és COB háromszögek R oldalú egybevágó, szabályos háromszögek. Ebből a trapéz területe:

(1) $$t_{\text{trapéz}} = 3 \cdot \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$ 2 pont

Az FO egyenes mind a DC, mind az AB szakaszok felezőmerőlegese, ezért az ábra szimmetrikus FO-ra, ezért az FGH háromszög olyan szimmetrikus háromszög, melynek tengelye $FO \equiv FL$. Így

(2) $$FGH\angle = FHG\angle$$ 1 pont

A feltétel szerint $GF \| AD$, és $HF \| BC$. Ámde AD és BC szöge $60°$, mert $AD \| OC$ és $BC \| OD$, és $DOC\angle = 60°$.

Ez azt jelenti, hogy

$$GFH\angle = 60°$$

(2)-t figyelembe véve az FGH háromszög szabályos. 2* pont

Jelöljük oldalának hosszát x-szel. FL szimmetriatengely, ezért egyben a háromszög magassága és súlyvonala is, így

$$FO = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2},$$ 2** pont

ámde ez éppen a kör sugara R, azaz

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2},$$

amiből

$$x = R\sqrt{3}.$$ 1** pont

Ekkor FGH területe

$$t_{FGH} = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$$

(3) $$t_{FGH} = \frac{3}{4} \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}.$$ 1 pont

Mivel (1) és (3) azonos értékű, ezért az állítást bizonyítottuk. 1 pont

Összesen 10 pont

2. megoldás

A trapéz területe az 1. megoldásban leírtak szerint

$$t_{trapéz} = 3 \cdot \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$ 2 pont

Az $AGFD$ négyszögben $AD \| GF$, tehát ez a négyszög egy körbe írt, azaz szimmetrikus trapéz. DF szárának hossza R sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög egy oldala, melyet a DKF háromszögből számolunk ki:

$$DF^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

hiszen FO felezi a DC húrt, és $FK = R - OK$, ahol OK a szabályos háromszög magassága. Innen

$$DF = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$ 1 pont

Továbbá $DFC\angle$ a szabályos tizenkétszög egyik szöge, ezért

$$DFC\angle = \frac{(12-2)\cdot 180^0}{12} = 150^0.$$

A szimmetria miatt DCF háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, ami azt jelenti, hogy

$$FDC\angle = \frac{180^0 - 150^0}{2} = 15^0.$$

Ekkor

$$ADF\angle = ADO\angle + ODC\angle + FCD\angle,$$
$$ADF\angle = 60^0 + 60^0 + 15^0,$$
$$ADF\angle = 135^0,$$

és

$$DFG\angle = 180^0 - 135^0,$$
$$DFG\angle = 45^0.$$

2 pont

Húzzunk $\perp$-t D-ből FG–re, talppontja T. A DTF háromszög szögei $45^0, 90^0, 45^0$, ezért

$$TF = DF\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1 pont

Ezzel megkapjuk a GF hosszát:

$$GF = AD + 2TF,$$
$$GF = R + 2\frac{\sqrt{2}}{2}R\sqrt{2-\sqrt{3}},$$
$$GF = R\left(1+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right),$$
$$GF = R\left(1+\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}\right),$$
$$GF = R\left(1+\sqrt{3}-1\right),$$
$$GF = R\sqrt{3}.$$

2 pont

Ekkor

$$t_{FGH} = \frac{(R\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$
$$t_{FGH} = \frac{3}{4}\cdot R^2\cdot\sqrt{3}.$$

1 pont

Így

$$t_{FGH} = t_{trapéz}$$

1 pont

Összesen: 10 pont

I. megjegyzés: 2* megkapható így is:

$$DAO\angle = 60^0$$

$$FGH\angle = DAO\angle = 60^0, \text{ (egyállású szögpár)}$$

$$FHG\angle = FGH\angle = 60^0,$$

így

$$GFH\angle = 60^0.$$

II. megjegyzés: 2**+1** megkapható így is:

$$GOH\angle = 2GFH\angle, \text{ (középponti és kerületi szögek közti összefüggés)}$$

már megkaptuk, hogy

$$GFH\angle = 60^0,$$

ezért

$$GOH\angle = 120^0,$$

azaz

$$GOL\angle = 60^0.$$

Tehát GOL háromszög egy szabályos háromszög fele.

$$\frac{x}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$x = R\sqrt{3}$$

III. megjegyzés: igazolható, hogy a feladat állítása akkor is fennáll, ha az F pont az R hosszúságú alaphoz tartozó hosszabb ív felezőpontja.

5. Legyenek az a,b,c,d számok egymástól és 0-tól különböző számjegyek.
Adja meg a lehető legkevesebb számú osztóval rendelkező, tízes számrendszerbeli, $N=\overline{abcd}+\overline{dabc}+\overline{cdab}+\overline{bcda}$ alakú számok közül a legnagyobbat!

Megoldás:

A számelmélet alaptétele szerint minden 1-nél nagyobb tízes számrendszerbeli pozitív egész M szám felírható

$$M=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

alakban, és ez a felírás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. (ahol p_i prím, $\alpha_i\in Z^+$)

Azt is tudjuk, hogy ekkor az M szám pozitív osztóinak száma

$$d(M)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1).$$ 1 pont

A feladatban szereplő N szám tízes számrendszerbeli felírásából kapjuk, hogy:

$$N=(1000a+100b+10c+d)+(1000d+100a+10b+c)+$$
$$+(1000c+100d+10a+b)+(1000b+100c+10d+a)$$

(1) $$N=1111\cdot(a+b+c+d)=11\cdot 101\cdot(a+b+c+d),$$

ahol 11 és 101 prímszámok, és $a+b+c+d\le 30=9+8+7+6$. 3 pont

Először megállapítjuk $d(N)$ minimális értékét.

$d(N)$ első két tényezője $(1+1)$, illetve $(1+1)$, tehát $d(N)$ vagy úgy lehet minimális, hogy az egyik $(1+1)$ tényezőt $(2+1)$-re változtatjuk, vagy úgy, hogy az $(1+1)\cdot(1+1)$ szorzatot újabb $(1+1)$ tényezővel szorozzuk. 1 pont

a) Ha $d(N_1)=(2+1)\cdot(1+1)=6$, akkor $a+b+c+d\le 30$ miatt csak $a+b+c+d=11$ jöhet szóba. Ekkor $N_1=11^2\cdot 101=12221$. 2 pont
Ez megvalósítható például az 5; 3; 2; 1 számnégyessel 1 pont

b) A $d(N_1)$ a legkisebb előállítható osztószám, hiszen
$d(N_2)=(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=8>d(N_1)=6$
A feladat egyetlen megoldása: $N_1=11^2\cdot 101=12221$ 2 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzés:
Ha a versenyző csak a $d(N_2)$ osztószámot vizsgálja, és a feltételeknek megfelelő $N_2=11\cdot 101\cdot 29=32219$ számot találja meg „legkisebbként”, amely megvalósítható a 9;8;7;5 számnégyessel, az utolsó (2+1+2) pontból összesen, maximum 2 pontot kaphat.

6. Tegyünk egy hagyományos óra minden számjegyére egy-egy korongot, tehát az 1-re egy darabot, a 2-re is egy darabot, és így tovább, végül a 12-re is egy darabot. Ezután egy lépés a következőt jelenti: megfogunk két tetszőleges korongot, és az egyiket az óramutató járásával ellentétes irányban, a másikat pedig az óramutató járásával azonos irányban a szomszédjára áttesszük. Elérhetjük-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mind a 12 korong ugyanazon a számjegyen legyen?

Megoldás:

A korongok minden helyzetében rendeljük hozzá a korongokhoz azt a számértéket, amelyik számjegyen a korong éppen áll. 1 pont

Kezdetben a korongok így értelmezett összértéke:

(1) $$1+2+3+...+11+12=78.$$ 1 pont

Egy lépés végrehajtása során háromféleképpen „változhat” a korongok összértéke:

a) ha az egyik korongot a 12-esről az 1-esre tesszük, akkor a másikat ellenkező irányban egy számról egy nála 1-gyel kisebb számra kell tennünk, így akkor a korongok összértéke $11+1=12$-vel csökken 1 pont

b) ha az egyik korongot a 1-esről az 12-esre tesszük, akkor a másikat ellenkező irányban egy számról egy nála 1-gyel nagyobb számra kell tennünk, így a korongok összértéke $11+1=12$-vel nő. 1 pont

c) Egyéb esetekben, ha az egyik korongot az óramutató járásával megegyező irányban helyezzük át, akkor értéke 1-gyel nő; de a másik korong ilyenkor az óramutató járásával ellenkező irányban mozdul el, ezért értéke n-nel csökken. Ez azt jelenti, hogy a korongok összértéke nem változik. (Nem kell külön foglalkoznunk azzal, hogy a két korong helyet cserél.) 1 pont

Ez azt jelenti, hogy minden lépés $12n$-nel változtatja meg a kezdeti értéket $n \in \{-1, 0, +1\}$.

Véges sok lépés után a változás $12b$, ahol $b \in Z$. 1 pont

Ha véges sok lépés után az összes korong az a számon lenne, akkor a korongok összértéke ebben a helyzetben $12a$ volna, ahol $a \in \{1, ...12\}$. 1 pont

A kezdeti összérték és a végső összérték között felírható a kapcsolat:

(2) $$12a = 78 + 12b.$$ 1 pont

A (2) egyenlet azonban nem teljesülhet egyetlen $a \in N^+$ és számpárra sem, mert (2) bal oldala osztható 12-vel, míg a jobb oldala nem, hiszen $78 = 6 \cdot 12 + 6$, vagyis 78 nem osztható 12-vel.

Ez azt jelenti, hogy a korongoknak a feladat követelményeit kielégítő elrendezése nem valósítható meg véges sok lépésben. 2 pont

Összesen: 10 pont