ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2012. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)		
A második két egyenlet által alkotott egyenletrendszerből kiszámítható a és b értéke. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy $2a^2 = 6$, azaz $a = \sqrt{3}$ $(a > 0)$.	2 pont	*Az a értékéért.*
$b^2 = 4 - 3 = 1$, azaz $b = 1$.	1 pont	*A b értékéért.*
$c = 2$. (A háromszög oldalai $\sqrt{3}$; 1 és 2 egység hosszúságúak.)	1 pont	*A c értékéért.*
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$,	1 pont	
a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján	1 pont	
a háromszög derékszögű, a leghosszabb oldallal, a c-vel szemben van a 90°-os szög.	1 pont	
$\sin\beta = \frac{1}{2}$, tehát $\beta = 30^\circ$,	1 pont	
így $\alpha = 60^\circ$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
Megjegyzés: Ha az oldalak alapján felismeri, hogy 60°-os derékszögű háromszögről van szó, de nem részletezi az indoklást,a teljes pontszámot kapja.		

1. c)		
A beírt kör sugara kiszámítható a terület és a kerület felének hányadosaként: $r = \frac{t}{\frac{k}{2}}$.	1 pont	*Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.*
A háromszög területe a két befogó szorzatának fele: $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	1 pont	
$r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \left(= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha a végeredményt csak közelítő értékkel adja meg, akkor legfeljebb 3 pontot kap.*

2. a)		
Kockával kétszer dobva 36-féleképpen lehetne (azonos valószínűséggel) *a* és *b* helyét kitölteni.	1 pont	
A dobás eredményei között csak az 1, a 2, a 3 és a 4 fordulhat elő. (Az *a*-t ezekből 4, a *b*-t már csak 3-féleképpen kaphatjuk,)	1 pont	
vagyis a kedvező kitöltések száma $3 \cdot 4 = 12$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b)		
Felsoroljuk a négy halmaz elemeit:		
$A = \{14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98\}$. $(\lvert A \rvert = 13.)$	1 pont	
$B = \{29; 58; 87\}$,	1 pont	
$C = \{14; 25; 38; 53; 70; 89\}$,	1 pont	
$D = \{13; 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; 77; 94\}$.	1 pont	
b1) Az $A \cup C$ elemszáma 17. (A 6 elemű C halmaznak és a 13 elemű A halmaznak pontosan két közös eleme van.)	1 pont	
b2) A $B \cap D$ elemszáma 1.(A *B* és a *D* halmaznak csak a 29 a közös eleme.)	1 pont	
b3) Felsoroljuk mindazokat a pozitív kétjegyű egészeket, amelyek a négy vizsgált halmazból pontosan kettőnek az elemei: 29; 38; 49; 70; 77.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a b1) és b2) kérdésre azért rossz a válasz, mert az A, a B, a C és/vagy a D halmazok elemeit rosszul sorolta fel, de a hibásan megadott halmazával a halmazműveletet helyesen értelmezte, az 1-1 pont jár.
2. Ha a b3) kérdésre adott válasz egy elemben tér el a helyestől, 2 pont helyett 1 pont adható.
3. Ha a b3) kérdésre adott válasza azért rossz, mert rosszul adta meg az A, a B, a C és/vagy a D halmaz elemeit, újabb pontot ne veszítsen.
4. Ha a vizsgázó megoldásában nem a fenti utat választja (nem sorolja fel az A-D halmazok elemeit), teljes pontszámot kellően indokolt megoldásra kapjon. Indoklás nélküli válaszok esetén megoldására 8 helyett legfeljebb 3 pontot kaphat.

3.		
Ha csak egyféle színűt rakunk vissza: **2 lehetőség**.	1 pont	
Ha mind a két szín szerepel: 1 piros és 5 kék visszarakásakor **1 lehetőség** van, (hiszen az öt egyforma mindig egymás mellett lesz).	2 pont	
2 piros és 4 kék visszarakásakor **3 lehetőség** van,	1 pont	
hiszen a 2 egyszínűt vagy egymás mellé rakjuk, vagy egy, illetve kettő másik választja el őket.	2 pont	*Csak 1 vagy 2 jó lehetőség megadása (számbavétele) 1 pont. Hiányos indoklás 1 pont.*
3 piros és 3 kék visszarakásakor **4 lehetőség** van,	1 pont	*Csak a helyes válasz esetén jár az 1 pont.*
hiszen a 3 egyszínűt vagy egymás mellé rakjuk, vagy egy-egy, illetve kettő-egy másik választja el őket (ez utóbbi kétféleképpen lehetséges): *P* *P* *P* *K* *K* *K* *P* *K* *K* *P* *P* *K* *P* *K* *P* *K* *K* *P* *P* *K* *P* *P* *K* *K*	2 pont	*Csak 1 jó lehetőség megadása (számbavétele) 0 pont, 2 vagy 3 jó lehetőség megadása (számbavétele) 1 pont. Hiányos indoklás 1 pont.*
4 piros és 2 kék visszarakásakor **3 lehetőség** van. Az indoklás megegyezik a 2 + 4 esettel.	1 pont	*Ezek a pontok járnak, ha azért hibás a válasza, mert a 2+4 és/vagy az 1+5 esetet rosszul számolta ki.*
5 piros és 1 kék visszarakásakor **1 lehetőség**. Az indoklás megegyezik az 1 + 5 esettel.	1 pont	
Összesen 14-féle elhelyezkedés lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

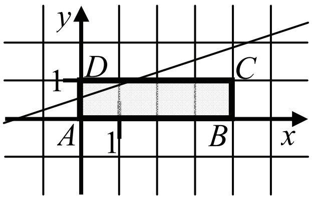
Megjegyzések:
1. Az eredmény jó rajzzal is indokolható.
2. Ha a vizsgázó kiszámolja, hogy hány lehetőség van a 6 piros, 5 piros – 1 kék, 4 piros – 2 kék, 3 piros – 3 kék esetben az elrendezésekre (és ezt helyesen is adja meg), majd az egészet megszorozza 2-vel, mert fordítva is lehet, akkor a 3 piros – 3 kék eseteket kétszer számolja, és ezért 2 pontot elveszít.

4. a)		
$a_n=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^3}\cdot\frac{1}{7^5}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{7^{2n-1}}=\frac{1}{7^{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}$	1 pont	
A 7 kitevője egy számtani sorozat első n tagjának összege,	1 pont	
amelynek első tagja 1, a különbsége 2.	1 pont	
$a_n=\frac{1}{7^{\frac{(1+2n-1)}{2}n}}$	1 pont	
$a_n=\frac{1}{7^{n^2}}$	1 pont	
Vizsgálandó az $\frac{1}{7^{n^2}}>49^{-50}$ egyenlőtlenség. Mivel $49=7^2$, megoldandó az $\frac{1}{7^{n^2}}>\frac{1}{7^{100}}$.	1 pont	
$7^{n^2}<7^{100}$.	1 pont	
Az $x\mapsto 7^x$ függvény szigorú monoton növekedése miatt	1 pont	
$n^2<100$.	1 pont	
A 100-nál kisebb legnagyobb négyzetszám a 81. A feltételeknek megfelelő legnagyobb természetes szám a 9.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

4. b) első megoldás		
Az b_n egy olyan mértani sorozat első n tagjának az összege, amelynek az első tagja $\frac{1}{7}$ és a hányadosa $\frac{1}{7^2}$.	1 pont	*Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.*
A $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ annak a mértani sornak az összege (s), amelyben az első tag $b=\frac{1}{7}$ és a $q=\frac{1}{7^2}$.	1 pont	
Mivel $\lvert q\rvert<1$, $s=\frac{b}{1-q}=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}\left(=\frac{7}{48}\right)$	1 pont	
A keresett határérték $\frac{7}{48}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b) második megoldás		
Az b_n egy olyan mértani sorozat első n tagjának az összege, amelynek az első tagja $\frac{1}{7}$ és a hányadosa $\frac{1}{7^2}$.	1 pont	*Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.*
$b_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \ldots + \frac{1}{7^{2n-1}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{49^n}}{1 - \frac{1}{49}}$	1 pont	
$b_n = \frac{7}{48} \cdot \left(1 - \frac{1}{49^n}\right)$.	1 pont	
$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \frac{7}{48}$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II.

5. a)		
		
Az $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ egyenes az y tengelyt a $\left(0;\frac{1}{2}\right)$,	1 pont	
az $y=1$ egyenest a $\left(\frac{3}{2};1\right)$ pontban metszi.	1 pont	
A megfelelő P pontok a téglalapnak az $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ egyenes alatti részéből kerülhetnek ki.	1 pont	
Ennek a résznek a területe: $T_{jó}=4-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{29}{8}$.	1 pont	
(A geometriai valószínűség kiszámítása szerint) a keresett valószínűség $P=\frac{\frac{29}{8}}{4}=\frac{29}{32}(=0{,}90625)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b1) első megoldás		
Marci a 4 szelvényét a 200 jegyből $\binom{200}{4}$-féleképpen vehette meg.	1 pont	
A 200 tombolajegy között 10 nyerő szelvény van és 190 nem nyerő. Marci akkor nyer 1 tárgyat, ha a négy szelvénye közül pontosan egy van a 10 nyerő között, a másik három pedig a 190 nem nyerő között van.	1 pont	*Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.*
Ez $\binom{10}{1}\cdot\binom{190}{3}$-féleképpen lehetséges.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{190}{3}}{\binom{200}{4}}\approx 0{,}1739$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b1) **második megoldás**		
A 200 jegyből a 10 nyerő szelvényt $\binom{200}{10}$-féleképpen húzhatják ki.	1 pont	
A 200 tombolajegyből 4 van Marcinál, és 196 nincs nála. Marci akkor nyer 1 tárgyat, ha a 10 nyerő szelvény közül pontosan egy van nála, a további 9 pedig a 196 többi szelvény közül való.	1 pont	*Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.*
A kedvező esetek száma tehát: $\binom{4}{1}\cdot\binom{196}{9}$	2 pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{196}{9}}{\binom{200}{10}}\approx 0{,}1739.$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b2) **első megoldás**		
A keresett esemény helyett az ellentett (komplementer) esemény valószínűségét számítjuk ki. A Marci nyert a tombolán esemény ellentett eseménye az, hogy Marci nem nyert a tombolán.	1 pont	*Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.*
Ez úgy volt lehetséges, hogy mind a 4 szelvénye a 190 nem nyerő szelvény közül való volt.	1 pont	
Az összes egyenlően valószínű kimenetelek száma $\binom{200}{4}$	1 pont	
Ezek közül a kedvezők száma $\binom{190}{4}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy Marci nem nyert a tombolán $\dfrac{\binom{190}{4}}{\binom{200}{4}}\left(\approx 0{,}8132\right).$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy Marci nyert a tombolán $1-\dfrac{\binom{190}{4}}{\binom{200}{4}}\approx 0{,}1868.$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b2) **második megoldás**		
Marci a 10 nyeremény közül 1, 2, 3 vagy 4-et nyerhetett.	1 pont	*Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.*
Annak valószínűsége, hogy egy szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{190}{3}}{\binom{200}{4}} \approx 0{,}1739.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy két szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{190}{2}}{\binom{200}{4}} \approx 0{,}0125.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy három szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{190}{1}}{\binom{200}{4}} \approx 0{,}0004.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy négy szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{4}\cdot\binom{190}{0}}{\binom{200}{4}} \approx 0{,}0000.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy Marci nyert a tombolán, ezen négy valószínűség összege 0,1868.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
Ha az b1) második megoldásában leírt eseménytérrel dolgozik, vagyis azt vizsgálja, hogy a 10 nyerő szelvény közül 1, 2, 3 vagy 4 darab lehetett Marcié, akkor a keresett valószínűséget az alábbi összeg adja meg: $\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{196}{9}+\binom{4}{2}\cdot\binom{196}{8}+\binom{4}{3}\cdot\binom{196}{7}+\binom{4}{4}\cdot\binom{196}{6}}{\binom{200}{10}}.$		

6. a) első megoldás		
A tengelypont koordinátái alapján *f* grafikonjának egyenlete: $y = a(x-4)^2 + 2$.	2 pont	
P is illeszkedik a grafikonra, ezért $4a + 2 = 0$,	1 pont	
ahonnan $a = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
Így $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$,	1 pont	
ahonnan $b = 4$, $c = -6$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. a) második megoldás		
Az *f* grafikonja parabola, keressük az egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban. A tengelypont $T(4;2)$ koordinátái kielégítik ezt az egyenletet: (1) $16a + 4b + c = 2$.	1 pont	
Az ismert parabolapont $P(2;0)$ koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: (2) $4a + 2b + c = 0$.	1 pont	
Parabolánk szimmetriatengelye az $x = 4$ egyenes, ezért az adott *P* parabolapont tükörképe, az $R(6;0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Ezért: (3) $36a + 6b + c = 0$.	1 pont	
Megoldva az (1)-(2)-(3) egyenletrendszert: $a = -\frac{1}{2}$; $b = 4$; $c = -6$.	3 pont	
Összesen:	**6 pont**	

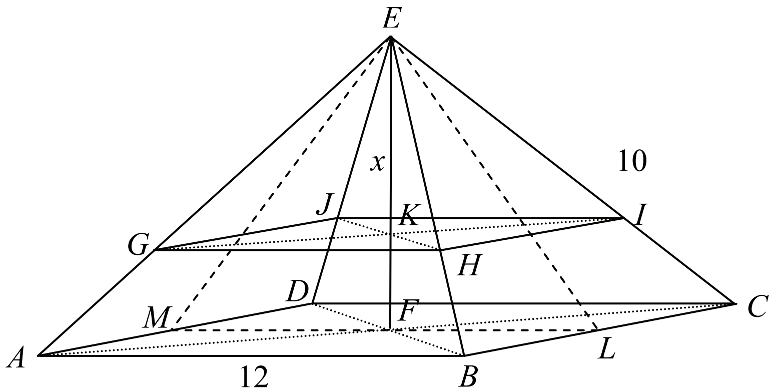
6. b)		
A megfelelő érintő iránytangense f deriváltjának az $x=3$ helyen felvett értéke.	1 pont	*Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.*
$f'(x)=-x+4$, így $m=f'(3)=1$.	1 pont	
Az $y=x+d$ egyenletű érintő illeszkedik f grafikonjának 3 abszcisszájú pontjára, amelynek második koordinátája $f(3)=\frac{3}{2}$.	1 pont	
Ezt felhasználva $d=-\frac{3}{2}$.	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y=x-\frac{3}{2}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. c)		
f zérushelyei 2 és 6,	1 pont	
ezért a keresett terület: $T=\int_2^6 f(x)dx=\int_2^6\left(-\frac{1}{2}x^2+4x-6\right)dx=$	1 pont	
$=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x^2-6x\right]_2^6=$	1 pont	
$=(-36+72-36)-\left(-\frac{4}{3}+8-12\right)$.	1 pont	
$T=\frac{16}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7.		
A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is megkapja a vizsgázó, ha az eredeti egyenletbe behelyettesítve ellenőrzi a gyököket.*
$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$	1 pont	
$\left(x^2\right)^{\log_3 x} = \left(x^{\log_3 x}\right)^2$	1 pont	
Legyen $y = x^{\log_3 x}$ (, ahol $y > 0$).	1 pont	
Ekkor az egyenlet $6y = y^2 - 6075$, vagyis $y^2 - 6y - 6075 = 0$.	1 pont	
A gyökök: $y_1 = -75$, amely nem megoldása az eredeti egyenletnek,	1 pont	
és $y_2 = 81$.	1 pont	
Az y lehetséges értékéből $x^{\log_3 x} = 81$,	1 pont	
és innen $\log_3\left(x^{\log_3 x}\right) = \log_3 81 = 4$.	2 pont	
(A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alapján:) $\left(\log_3 x\right)^2 = 4$.	1 pont	
Ha $\log_3 x = 2$,	1 pont	
akkor $x_1 = 3^2 = 9$.	1 pont	
Ha $\log_3 x = -2$,	1 pont	
akkor $x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.	1 pont	
Mind a két szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

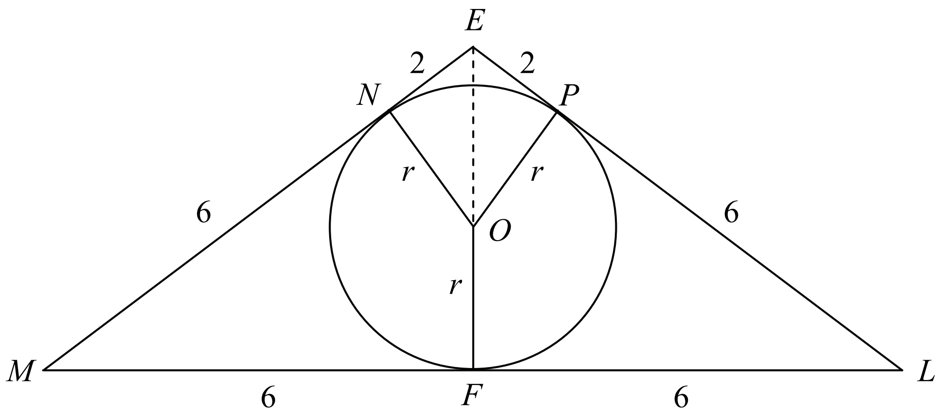
8.		
Legyen a kőszegi *K* csoport taglétszáma: *k*; a tatai *T* csoporté: *t*; míg a füredi *F* csoporté: *f*. Jelölje továbbá a *K* csoport tagjai életkorának összegét S_k; a *T* csoportét S_t; míg az F csoportét S_f.	2 pont	*Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.*
Ekkor a következő egyenleteket lehet felírni a megadott adatokkal: $S_k = 37k$;	1 pont	
$S_t = 23t$;	1 pont	
$S_f = 41f$;	1 pont	
$S_k + S_t = 29(k+t)$;	1 pont	*A feladat megoldásához e három összefüggésből kettő is elegendő, ezért bármelyik kettő felírása is 3 pontot ér.*
$S_k + S_f = 39{,}5(k+f)$;	1 pont	
$S_t + S_f = 33(t+f)$.	1 pont	
Az első három összefüggést behelyettesítjük a következő három egyenletbe: $37k + 23t = 29(k+t)$, azaz $t = \frac{4}{3}k$.	1 pont	*A feladat megoldásához e három összefüggésből kettő is elegendő, ezért bármelyik kettő felírása is 3 pontot ér.*
$37k + 41f = 39{,}5(k+f)$, azaz $f = \frac{5}{3}k$.	1 pont	
$23t + 41f = 33(t+f)$, azaz $t = \frac{4}{5}f$.	1 pont	
Az összes dolgozó átlagéletkora: $\frac{S_k + S_t + S_f}{k+t+f}$.	1 pont	*Ha a háromismeretlenes egyenletrendszerben egy konkrét számhármassal számolva helyes eredményt kap, de nem bizonyítja, hogy ugyanerre az eredményre jutna minden gyök esetén, 2 pontot veszít.*
Ezekből t és f kifejezhető k segítségével, és akkor a következőt kapjuk a keresett átlagra: $\frac{37k + 23\cdot\frac{4}{3}k + 41\cdot\frac{5}{3}k}{k + \frac{4}{3}k + \frac{5}{3}k} = \frac{37 + \frac{92}{3} + \frac{205}{3}}{4} =$	2 pont	
$= \frac{37+99}{4} = \frac{136}{4} = 34$.	1 pont	
A cég összes dolgozójának átlagéletkora 34 év.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

9. a)



Az ábra jelöléseivel a *GHIJE* gúla hasonló az *ABCDE* gúlához.	1 pont	
$\frac{V_{ABCDE}}{V_{GHIJE}} = 2$, ezért a megfelelő szakaszok aránya (pl.): $\frac{AB}{GH} = \frac{FE}{KE} = \sqrt[3]{2}$.	2 pont	
$GH = \frac{AB}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} (\approx 9{,}524)$. $4 \cdot GH = \frac{48}{\sqrt[3]{2}} (\approx 38{,}10)$. A színes vonalak összhossza: 38,10 m.	1 pont	
Pitagorasz tétele alapján az *ABD* derékszögű háromszögben: $BD = 12\sqrt{2}$. $FB = 6\sqrt{2}$	1 pont	
Pitagorasz tétele alapján az *FBE* derékszögű háromszögben: $(FE)^2 = 10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2$.	1 pont	
$FE = \sqrt{28}\ \left(= 2\sqrt{7} \approx 5{,}29\right)$	1 pont	
$KE = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt[3]{2}} \left(= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2}} \approx 4{,}2\right)$	1 pont	
$FK = FE - KE = \sqrt{28} - \frac{\sqrt{28}}{\sqrt[3]{2}} \left(= \sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}09\right)$ A térfogatot felező sík 1,09 m távolságra van a terem padlójától.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. b) első megoldás



A mikrofont a gúlába írt gömb O középpontjába kell elhelyezni.	1 pont	
Az ábrán az EL és az EM az oldallapok magassága. Pitagorasz tétele alapján az ELC derékszögű háromszögben: $(EL)^2 = 10^2 - 6^2$, ahonnan $EL = 8$.	1 pont	
Mivel külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így $MF = MN = 6$, és $NE = 2$.	1 pont	
Pitagorasz-tétele alapján az OEN derékszögű háromszögben: $(OE)^2 = (ON)^2 + (NE)^2$.	1 pont	
$\left(\sqrt{28} - r\right)^2 = r^2 + 2^2$	1 pont	
$r = \frac{6}{\sqrt{7}}$ $(\approx 2{,}27)$	1 pont	
A mikrofon távolsága az E ponttól: $EO = EF - OF = 5{,}29 - 2{,}27 = 3{,}02$ méter.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b) **második megoldás**		
A mikrofont az O pontba kell elhelyezni. Ennek a pontnak a távolsága a gúla lapjaitól legyen x (méter). Az ábrán az EL az EBC oldallap magassága. Az O pontot összekötve az $ABCDE$ gúla csúcsaival, öt gúlára bontjuk az $ABCDE$ gúlát. Írjuk fel az $ABCDE$ gúla térfogatát az öt gúla térfogatának összegeként.	1 pont	
Az $ABEO$, a $BCEO$, a $DCEO$ és az $ADEO$ gúlák egybevágóak. Térfogatuk egyenlő. (1) $V_{ABCDE} = V_{ABCDO} + 4 \cdot V_{BCEO}$	1 pont	
$V_{ABCDE} = \frac{AB^2 \cdot EF}{3} = \frac{144 \cdot \sqrt{28}}{3} = 48 \cdot \sqrt{28}$. $V_{ABCDO} = \frac{AB^2 \cdot x}{3} = \frac{144 \cdot x}{3} = 48x$.	1 pont	
$V_{BCEO} = \frac{T_{BCE} \cdot x}{3}$. A BCE háromszög BC oldalához tartozó magasságát a BEL derékszögű háromszögből számolva: $EL = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.	1 pont	
$T_{BCE} = \frac{BC \cdot EL}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$. Ezért $V_{BCEO} = \frac{T_{BCE} \cdot x}{3} = \frac{48 \cdot .x}{3} = 16x$.	1 pont	
A térfogatokra kapott kifejezéseket az (1) egyenlőségbe beírva: $48 \cdot \sqrt{28} = 48x + 4 \cdot 16x = 112x$, ahonnan $x = \frac{6\sqrt{7}}{7} \approx 2,27$ (m).	1 pont	
A mikrofon távolsága az E ponttól: $EO = EF - OF = 5,29 - 2,27 = 3,02$ méter.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	