

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2011. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**NEMZETI ERŐFORRÁS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$a \cdot (a^2 + 1)$	2 pont	<i>Ez a 2 pont nem bontható.</i>
Összesen:	2 pont	

2.		
A tankönyvek ára 6300 Ft.	1 pont	
A füzetek ára 2250 Ft.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
Az M-es pólók relatív gyakorisága: $\left(\frac{238}{1116} \approx\right) 0,2133$.	1 pont	<i>A legalább két tizedesjegyre történő helyes kerekítés is elfogadható.</i>
Az L-es méret a módusz.	1 pont	<i>Ha 322-t válaszol, akkor is megkapja a pontot.</i>
Átlagosan 186 darabot adtak el.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

4.		
Az igaz állítás betűjele: A, C.	2 pont	<i>Egy-egy helyes válasz 1-1 pont. Ha B szerepel, 0 pont.</i>
Összesen:	2 pont	

5.		
$x = 12$;	1 pont	
$y = 9$.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

6.		
A kézfogások száma 9.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó 18 kézfogást ír, 1 pontot kap.</i>
Összesen:	2 pont	

7.		
$X \cdot Y = 24 \cdot 10^{101}$	1 pont	<i>Helyes végeredmény esetén ez a pont is jár.</i>
$X \cdot Y = 2,4 \cdot 10^{102}$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

8.		
$q = \frac{3}{4}$	1 pont	
$a_5 = a_3 \cdot q^2$	1 pont	
$a_5 = \frac{27}{8} (= 3,375)$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

9.		
$a = \frac{3h - 256}{10}$ vagy $182 = \frac{10a + 256}{3}$	1 pont	
$a = \frac{3 \cdot 182 - 256}{10}$	1 pont	<i>Helyes válasz esetén ez a pont is jár.</i>
Az alkar $a = 29$ cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

10.		
Két év alatt az érték $1,2 \cdot 1,3 (= 1,56)$ -szorosára nő.	1 pont	
Két év után a könyv értéke: ($23000 \cdot 1,2 \cdot 1,3 =$)35880 Ft.	1 pont	
A növekedés 56%-os.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

11.		
$b < 0$	1 pont	
$b = 0$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

12.		
$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$	1 pont	<i>Ez a pont csak a teljes felsorolásért jár.</i>
$B = \{1; 4; 16\}$	1 pont	<i>Ez a pont csak a teljes felsorolásért jár.</i>
$A \cap B = \{1; 4\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{2; 3; 6; 9; 12; 18; 36\}$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

II. A

13. a) első megoldás		
Mivel $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$,	2 pont	<i>Ez a 2 pont nem bontható.</i>
így a megoldandó egyenlet: $x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2$,	1 pont	<i>A pont a zárójel szükségességének ismeretéért jár. Akkor is adjuk meg a pontot, ha a vizsgázó írásban nem jelöli, de jól bontja fel a zárójelet.</i>
azaz $x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$.	1 pont	
Ebből $x = \frac{3}{2}$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

13. a) második megoldás		
Felismeri az alkalmazható azonosságot.	2 pont	
$x^2 - (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x - (x-1))(x + (x-1)) = 2$,	1 pont	<i>Akkor is adjuk meg az 1-1 pontot, ha a vizsgázó írásban nem jelöli, de jól bontja fel a zárójelet.</i>
ebből $(x - x + 1)(2x - 1) = 2$.	1 pont	
Ebből $x = \frac{3}{2}$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

13. b)		
Az 1-nél nagyobb x -ek esetén	1 pont*	
$\lg x - \lg(x-1) = 2 \Leftrightarrow \lg \frac{x}{x-1} = 2$.	1 pont	<i>Ez az 1 pont a logaritmus azonosságának helyes alkalmazásáért jár.</i>
(A logaritmus definíciójából adódik, hogy) $\frac{x}{x-1} = 100$.	1 pont	
Azaz $x = 100(x-1)$,	1 pont	
Ebből $x = \frac{100}{99} (\approx 1,01)$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	6 pont	
<i>A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a kapott gyököket az eredeti egyenletbe való behelyettesítés alapján fogadja el.</i>		

14.		
A telefonszám 7-jegyű, így egy 4 és egy 3 számból álló oszlop számaiból áll.	1 pont	<i>Ez az 1-1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket a gondolatokat csak a megoldása során.</i>
Két lényegesen különböző eset van: az első számjegy vagy a középső oszlopból, vagy valamelyik szélső oszlopból való.	1 pont	
<i>Első eset</i> Ha a középső oszlop számjegyeivel kezdődik a szám, akkor – mivel 0-val nem kezdődhet a telefonszám – az első számjegy 3-féle lehet.	1 pont	
A 4 számjegynek $3 \cdot 3! = 18$ sorrendje lehetséges.	1 pont	
Ekkor az első 4 számjegyet követő 3 számjegy vagy az első, vagy a harmadik oszlop számjegyeiből adódik. A 3 számjegy mindkét esetben $3! = 6$ -féle sorrendben írható.	1 pont	
Az így adódó 7-jegyű telefonszámok száma: $3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2 (= 216)$.	2 pont	<i>Ha nem említi mindkét lehetőséget, 1 pontot kaphat.</i>
<i>Második eset</i> A telefonszám első 3 számjegye az első oszlopban álló számjegyekből áll. Azok sorrendje $3! = 6$ -féle lehet, és mindegyik elrendezés esetében az azokat követő 4 jegy sorrendje (a középső oszlopból) $4! = 24$ -féle lehet.	1 pont	
Így az ilyen telefonszámok száma $3! \cdot 4! (= 144)$.	2 pont	
Hasonlóan adódik, hogy a harmadik oszlop számjegyeivel kezdődő telefonszámok száma is ugyanannyi ($3! \cdot 4! = 144$).	1 pont	
A feltételeknek eleget tevő 7-jegyű telefonszámok száma $216 + 144 + 144 = 504$.	1 pont	
Összesen:	12 pont	

15. a)

csak maximuma van	csak minimuma van	minimuma és maximuma is van	nincs szélsőértéke
<i>g</i>	<i>j</i>	<i>f</i>	<i>h; m</i>

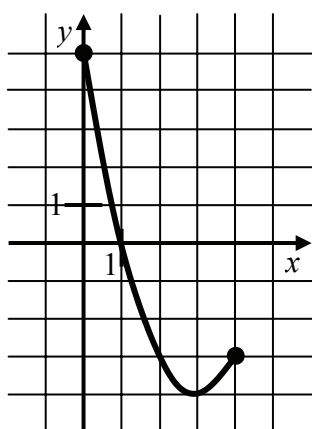
Helyesen beírt függvény betűjele 1 pont, ha ez a betűjel csak egy helyen szerepel.

5 pont

Összesen:

5 pont

15. b)



3 pont

Ha tudja, hogy a függvény képe egy felfele nyitott parabola íve 1 pont.

A tengelypont jó helyen van 1 pont.

Ha figyelembe veszi az adott értelmezési tartományt 1 pont.

Értékkészlete $[-4; 5]$.

2 pont

Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az adott értelmezési tartományt, legfeljebb 1 pont adható.

A $k(x) = 0$ egyenlet megoldásai (1 és 5) közül csak az 1 tartozik az értelmezési tartományba, tehát ez a zérushely.

2 pont

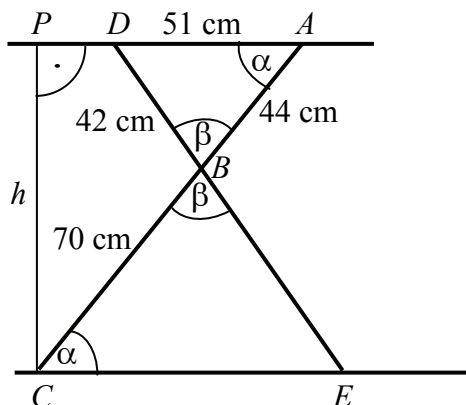
Ha vizsgázó a $k(x) = 0$ egyenlet mindkét megoldását megadja zérushelyként, legfeljebb 1 pont adható.

Összesen:

7 pont

II. B

16. a)



Az ABD és a CBE háromszög hasonlók,	2 pont	
mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek).	1 pont	
Ezért (a megfelelő oldalaik aránya is egyenlő, tehát) $\frac{BE}{42} = \frac{70}{44}$.	2 pont	
$BE = 42 \cdot \frac{70}{44} \approx 66,8$ (cm).	1 pont	
A DE tartórúd tehát ≈ 109 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

16. b)

Az ABD háromszögben számoljuk ki pl. az α szöget koszinusztétel alkalmazásával.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a gondolat csak a megoldásban jelenik meg.</i>
$42^2 = 51^2 + 44^2 - 2 \cdot 51 \cdot 44 \cdot \cos \alpha$.	2 pont	
Ebből $\cos \alpha \approx 0,6179$,	2 pont	
$\alpha \approx 51,8^\circ$.	1 pont	
Az APC derékszögű háromszögből: $h = AC \cdot \sin \alpha$,	2 pont	
azaz $h \approx 114 \cdot \sin 51,8^\circ \approx 89,6$ (cm).	1 pont	
A vasalófelület tehát $\approx (90+3=) 93$ cm magasságban van a padló felett.	1 pont	
Összesen:	10 pont	
<p><i>Az ABD háromszög másik két szögének nagysága $\beta \approx 72,7^\circ$ és $\angle ADB \approx 55,5^\circ$. Ha a másik tartórúd segítségével számol, akkor $h \approx 109 \cdot \sin 55,5^\circ \approx 89,8$ cm adódik, ami kerekítve ugyancsak 90 cm.</i></p>		

17. a) első megoldás		
Összesen 6^3 -féle (egyenlően valószínű) dobássorozat lehetséges.	1 pont	
a1) 300 zseton a nyeremény: Mindhárom dobás páros. Ez 3^3 -féleképpen következhet be.	1 pont	
300 zsetont $\frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a2) 500 zseton a nyeremény: Az első dobás 1-es, a második páros és a harmadik páratlan. Ez $3 \cdot 3$ -féleképpen következhet be.	1 pont	
Az, hogy az első dobás 1-es, a második páratlan és a harmadik páros szintén $3 \cdot 3$ -féleképpen teljesülhet.	1 pont	
A kedvező esetek száma $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 (= 18)$.	1 pont	
500 zsetont $\frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{12}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a3) 800 zseton a nyeremény: Az első dobás 3-as, a másik kettő pedig páratlan. Ez $3 \cdot 3$ -féleképpen következhet be.	1 pont	
(Mivel a három dobás 6^3 -féle lehet, így) annak a valószínűsége, hogy 800 zsetont nyer $\frac{3 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{24}$.	1 pont	
a4) 2000 zseton a nyeremény: Mivel a kedvező esetek száma 1,	1 pont	
így a 2000 zsetonos nyeremény valószínűsége $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

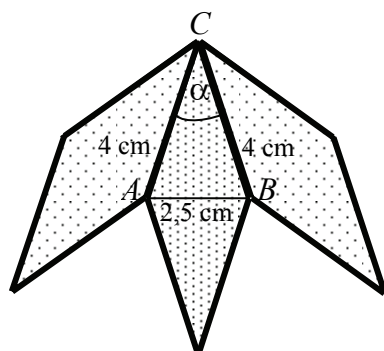
17. a) második megoldás		
a1) 300 zseton a nyeremény: Mivel (a három dobás eredménye független egymástól, és) minden dobás eredménye $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz páros,	1 pont	
ezért 300 zsetont $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a2) 500 zseton a nyeremény: Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es lesz $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a második páros és a harmadik páratlan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.	1 pont	
Ugyanennyi $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$ annak a valószínűsége is, hogy a második dobás páratlan és a harmadik páros.	1 pont	<i>Vagy: a második és harmadik dobás eredménye paritás szempontjából 4-féle lehet (ps-ps, ps-pt, pt-ps és pt-pt), és mivel mindegyik ugyanakkora valószínűséggel következik be, a kedvező esetek bekövetkezésének valószínűsége 0,5.</i>
Annak a valószínűsége, hogy az egyik dobás páros, a másik páratlan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,	1 pont	
így 500 zsetont $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a3) 800 zseton a nyeremény: Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 3-as $\frac{1}{6}$, annak pedig, hogy a további két dobás páratlan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.	1 pont	
800 zsetont $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
a4) 2000 zseton a nyeremény: A három dobás bármelyike során az 5-ös dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$,	1 pont	
(és mivel a három dobás eredménye független egymástól,) ezért 2000 zsetont $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ valószínűséggel nyerhet a játékos.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

17. b)		
A nyertes dobássorozat komplementer eseménye olyan forduló, amelyben nem nyer a játékos.	2 pont	<i>Ez a 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket a gondolatokat csak felhasználja a megoldása során.</i>
Az esemény és a komplementer esemény valószínűségének összege 1.	1 pont	
Nyerési esély $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{216}$,	1 pont	
azaz $\frac{27}{216} + \frac{18}{216} + \frac{9}{216} + \frac{1}{216} = \frac{55}{216} (\approx 0,25)$.	1 pont	
Tehát annak a valószínűsége, hogy a játékos nem nyer $1 - \frac{55}{216} = \frac{161}{216} (\approx 0,75)$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. a) első megoldás		
A sütemények száma többszöröse a 16-nak és a 18-nak is.	1 pont	<i>Akkor is jár a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.</i>
16 és 18 legkisebb közös többszöröse 144.	2 pont	
A sütemények száma ezért a 144-nek többszöröse.	1 pont	<i>Akkor is jár a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.</i>
A 144 többszörösei közül a 400 és az 500 közé csak a 144 háromszorosa esik.	1 pont	
A sütemények száma 432.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. a) második megoldás		
Ha egy lány n db süteményt sütött és egy fiú k db-ot kapott, akkor a sütemények száma $16n$ és $18k$ módon is kiszámítható, azaz $16n = 18k$.	1 pont	
(Ebből $n = \frac{9k}{8}$. Mivel n és k is pozitív egész és $(9; 8) = 1$, így) k osztható 8-cal.	2 pont	
A sütemények száma 400 és 500 közé esik, így $400 < 18k < 500$, azaz $23 \leq k \leq 27$.	1 pont	
Ezek közül csak a 24 osztható 8-cal, ezért $k = 24$.	1 pont	
A sütemények száma tehát $18 \cdot 24$, azaz 432.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. b)



Modellt talál a feladathoz (pl. felülnézeti ábrát készít, amelyen a kívánt elhelyezésben tünteti fel a süteményeket).

2 pont

Az ABC egyenlő szárú háromszögből:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1,25}{4} = 0,3125.$$

2 pont

Ebből $\alpha \approx 36,4^\circ$ ($36,41^\circ < \alpha < 36,42^\circ$)

1 pont

(Mivel $9 < \frac{360^\circ}{\alpha} < 10$, ezért) Dani legfeljebb 9 darabot tudott elhelyezni a tálon a leírt módon.

1 pont

Összesen:

6 pont

18. c)

A rombusz alakú sütemény felülnézeti területének $\approx 9,5 \text{ cm}^2$.

2 pont

A területet kiszámíthatja az előző részben kapott szög segítségével, vagy kiszámítja a rombusz másik átlójának a hosszát ($\approx 7,6 \text{ cm}$; 1 pont) és az átlókkal számítja a területet (1 pont).

A linzerkarika felülnézeti területének

$$2^2\pi - x^2\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

1 pont

$$4\pi - x^2\pi \approx 9,5$$

1 pont

$x \approx 0,99$. Azaz a linzerkarika belső körének sugara kb. 1 cm.

1 pont

Összesen:

5 pont