

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2011. május 3.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**NEMZETI ERŐFORRÁS  
MINISZTERIUM**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszerkesztésekért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

**I.**

<b>1.</b>		
Egy, a feltételeknek megfelelő szám.	1 pont	<i>Ha ez a megoldásból derül ki, a pont jár.</i>
A feltételnek megfelelően a következő esetek lehetségesek:	1 pont	
1. eset: 6 darab 6-os jegy: 1 darab hatjegyű szám van.		
2. eset: 5 darab 5-ös, 1 darab 1-es jegy.	1 pont	
6 ilyen szám van.	1 pont	
3. eset: 4 darab 4-es, 2 darab 2-es jegy.	1 pont	
Ezekből a számjegyekből $\binom{6}{4}$ ,	1 pont	
azaz 15 szám képezhető.	1 pont	
4. eset: 3 darab 3-as, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy.	1 pont	
Ebben az esetben $\frac{6!}{3!2!} =$	1 pont	
$= 60$ megfelelő szám van.	1 pont	
(Más eset nincs,) tehát összesen 82, a feltételnek megfelelő hatjegyű szám képezhető.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	

<b>2.</b>		
$x - 1 \geq 0$ és $5 - x \geq 0$ ,	1 pont	
ezért az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $[1; 5]$ .	1 pont	
Mindkét oldal nem negatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás (a megállapított értelmezési tartományon). Azt kapjuk, hogy $x \geq 3$ .	1 pont	<i>Indokolt négyzetre emelés esetén jár ez a pont.</i>
Így $A = [3; 5]$ .	1 pont	<i>Ha nem írt értelmezési tartományt, akkor ez a pont nem jár.</i>
Az $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4) > -2$ egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $]2; \infty[$ .	1 pont	
Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő,	1 pont	
ezért $2x - 4 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ,	1 pont	
így $2x - 4 < 4$ .	1 pont	
Innen $x < 4$ .	1 pont	
Így $B = ]2; 4[$ .	1 pont	<i>Ha nem írt értelmezési tartományt, akkor ez a pont nem jár.</i>
$A \cup B = ]2; 5]$	1 pont	<i>A rosszul felírt A és B halmazokból helyesen képzett válaszok esetén is jár az 1-1 pont.</i>
$A \cap B = [3; 4[$	1 pont	
$B \setminus A = ]2; 3[$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>13 pont</b>	
<p><i>Megjegyzések:</i></p> <p>1. A megfelelő pontszámok járnak akkor is, ha a vizsgázó egyenlőtlenségekkel adja meg jól a megfelelő halmazokat.</p> <p>2. Csak a pontosan (végpontok, zártság, nyitottság) megadott halmazok esetén jár a megfelelő pontszám.</p> <p>3. A halmazjelölés hibája (pl. <math>B = 2 &lt; x &lt; 4</math>) miatt egy alkalommal vonjunk le 1 pontot.</p>		

<b>3.</b>		
Jelölje $f$ a sportklub felnőtt tagjainak számát. Ekkor a diákok száma a sportklubban $640 - f$ .	1 pont	
A rendszeresen sportolók száma 640-nek az 55%-a, $0,55 \cdot 640 = 352$ fő.	1 pont	
A rendszeresen sportolók aránya a teljes tagságban $0,55$ . Ennek a $\frac{8}{11}$ -ed része, vagyis $0,55 \cdot \frac{8}{11} = 0,4$ a rendszeresen sportolók aránya a felnőttek között.	2 pont	
A rendszeresen sportolók aránya a diákok között ennek az arányszámnak a kétszerese, vagyis $0,8$ .	1 pont	
A rendszeresen sportoló felnőttek száma: $0,4 \cdot f$ .	1 pont	
A rendszeresen sportoló diákok száma: $0,8 \cdot (640 - f)$ .	1 pont	
A rendszeresen sportolók száma e két létszám összege: $0,4f + 0,8 \cdot (640 - f) = 352$ .	2 pont	
Innen $f = 400$	1 pont	
és $640 - f = 240$ .	1 pont	
A felnőtt tagok száma 400, a diákok száma 240.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	<i>Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó számolással jelzi, hogy az eredmény megfelel a szöveg feltételeinek. (A sportoló felnőttek száma 160, a nem sportoló felnőtteké 240, a sportoló diákoké 192, a nem sportoló diákoké 48.)</i>
<b>Összesen:</b>	<b>13 pont</b>	

<b>4. a)</b>		
$n = 8$	1 pont	
$p = 0,05$	1 pont	
a várható érték: $n \cdot p = 0,4$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4. b)</b>		
Minden gép $1 - p = 0,95$ valószínűséggel indul be a reggeli munkakezdetkor.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind a 8 gép beindul: $0,95^8$ ,	2 pont	
ami $\approx 0,6634$ (66,34%).	1 pont	<i>Bármely, legalább egy tizedesjegyre kerekített helyes érték elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>4. c) első megoldás</b>		
A kérdéses esemény (A) komplementerének (B) valószínűségét számoljuk ki, azaz hogy legfeljebb 2 gép romlik el.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha csak a megoldásból látszik, hogy komplementerrel számol.</i>
$P(B) = 0,95^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,05 \cdot 0,95^7 + \binom{8}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^6 =$	2 pont	<i>Akkor is megkapja a 2 pontot, ha ez nincs leírva, de kiderül a helyes megoldásból.</i>
$= 0,95^8 + 8 \cdot 0,05 \cdot 0,95^7 + 28 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^6 \approx$	1 pont	
$\approx 0,66342 + 0,27933 + 0,05146 \approx 0,9942$	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha nem írja fel, de jól számolja ki az összeget.</i>
$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0,9942 = 0,0058$ . Tehát valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának valószínűsége.	1 pont	<i>E nélkül a mondat nélkül is jár az 1 pont a helyes kivonásért.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>4. c) második megoldás</b>		
<p>A kérdéses esemény (A) pontosan akkor következik be, ha a meghibásodott gépek száma 3, 4, 5, 6, 7, vagy 8. Ha <math>A_k</math> jelöli azt az eseményt, hogy pontosan <math>k</math> db gép hibásodik meg, akkor</p> $A = A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$ <p>(Az <math>A_k</math> események páronként kizárják egymást, ezért)</p> $P(A) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8).$	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha csak a megoldásból látszik, hogy jó modellel számol.</i>
$P(A) = \binom{8}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^5 + \binom{8}{4} \cdot 0,05^4 \cdot 0,95^4 +$ $+ \binom{8}{5} \cdot 0,05^5 \cdot 0,95^3 + \binom{8}{6} \cdot 0,05^6 \cdot 0,95^2 +$ $+ \binom{8}{7} \cdot 0,05^7 \cdot 0,95^1 + \binom{8}{8} \cdot 0,05^8$	2 pont	<i>Ez, ha nincs explicit leírva, de kiderül a helyes megoldásból, akkor is megkapja a 2 pontot. Ha az összeg 1 tagja hiányzik vagy hibás, 1 pontot kap.</i>
<p>(Az összeg tagjait öt tizedesjegy pontossággal számítva az utolsó két tag már 0,00000-nak adódik,)</p> $P(A) \approx (0,00542 + 0,00036 + 0,00002 + 0,00001) = 0,00581.$	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha nem írja fel, de jól számolja ki az összeget.</i>
<p>Tehát négy tizedesjegyre kerekítve valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának valószínűsége.</p>	1 pont	<i>E nélkül a mondat nélkül is jár az 1 pont a helyes közelítésért.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	
<p><i>Megjegyzés:</i> Ha számolási hiba miatt nem kapja meg <math>P(A)</math> értékére közelítően a 0,0058-et, az utolsó 1 pontot nem kaphatja meg.</p>		

## II.

<b>5. a)</b>		
Az $A_1C_0C_1$ háromszög területe: $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .	1 pont	
Az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszöget $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányú hasonlósággal lehet átvinni az $A_{n+1}C_nC_{n+1}$ háromszögbe ( $n \in \mathbf{N}^+$ ).	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával következetesen és jól számol a későbbiekben.</i>
A hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel szerint	1 pont	<i>Ha a tételt a megoldásban helyesen alkalmazza, jár a pont.</i>
az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszög területe: $t_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 t_{n-1} = \frac{1}{3} t_{n-1}$ (ha $n > 1$ ).	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával következetesen és jól számol a későbbiekben.</i>
A területek összegéből képezett $(t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots)$ tehát olyan mértani sor,	1 pont	
amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$ .	1 pont	
A végtelen sok háromszög területének összege: $T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ( $\approx 0,433$ ).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	
<p><i>Megjegyzés:</i>  Teljes pontszámot kap a vizsgázó, ha a számításai során kerekített értékeket (is) használ.  Ha nem a kerekítési szabályoknak megfelelően kerekít, akkor 1 pontot veszítsen.</p>		



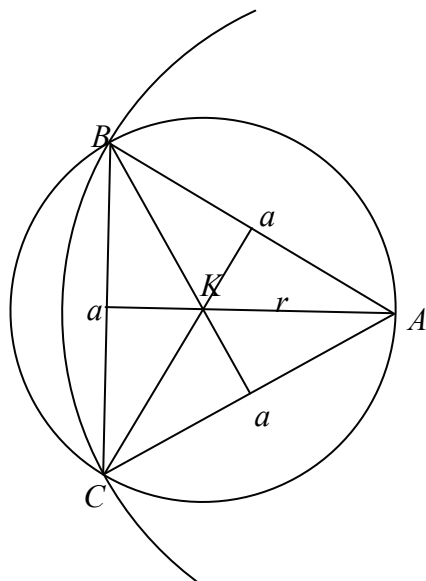
<b>5. b) első megoldás</b>		
Jelölje $d_n$ a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát ( $n \in \mathbf{N}^+$ ) $d_1 = C_0C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$	1 pont	
A hasonlóság miatt minden $n > 1$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}.$	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával <math>\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)</math> következetesen és jól számol a későbbiekben.</i>
A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat,	1 pont	
amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .	1 pont	
Vizsgáljuk az $S_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ összegeket! A $d_1 + d_2 + \dots + d_n + \dots$ olyan mértani sor, melynek hányadosa $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , tehát van határértéke.	1 pont	
Az $\{S_n\}$ sorozat határértéke (a mértani sor összege): $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}.$	1 pont	
$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$ Mivel $\sqrt{3}$ kisebb, mint 1,8, ezért $\{S_n\}$ határértéke kisebb, mint 1,4.	1 pont	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \approx 1,366 < 1,4$
Az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan növekedő,	1 pont	
ezért az $\{S_n\}$ sorozat egyetlen tagja sem lehet nagyobb a sorozat határértékénél (tehát igaz az állítás).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	
<i>Megjegyzés: Ha a vizsgázó kerekített értékekkel számol, és nem indokolja, hogy ez miért nem okoz hibát a bizonyításban, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.</i>		

<b>5. b) második megoldás</b>		
Jelölje $d_n$ a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát ( $n \in \mathbf{N}^+$ ) $d_1 = C_0C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$	1 pont	
A hasonlóság miatt minden $n > 1$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}.$	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával <math>\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)</math> következetesen és jól számol a későbbiekben.</i>
A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat,	1 pont	
amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .	1 pont	
$S_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n - 1}{1 - \sqrt{3}}.$	1 pont	<i><math>S_n</math> bármely helyesen felírt alakjáért jár a pont.</i>
Azt kell belátni, hogy minden pozitív egész $n$ esetén $\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n - 1}{1 - \sqrt{3}} < 1,4$ teljesül.	2 pont	
Átrendezve: $\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} > 2,4 - 1,4\sqrt{3} (\approx -0,025)$	1 pont	
Mivel a bal oldalon pozitív szám áll, és $2,4 - 1,4\sqrt{3} (\approx -0,025)$ negatív szám, ezért az állítás igaz.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	
<i>Megjegyzés: Ha a vizsgázó kerekített értékekkel számol, és nem indokolja, hogy ez miért nem okoz hibát a bizonyításban, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.</i>		

<b>6. a) első megoldás</b>		
Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ ,	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3; -2)$ . (sugara: $r = 4$ )	1 pont	
A kör $K$ középpontja az $ABC$ szabályos háromszög súlypontja.	1 pont	
Az $AK$ szakasz a háromszög $AF$ súlyvonalának kétharmada,	1 pont	
ahonnan $F(-5; -2)$ .	1 pont	
A szabályos háromszög $AF$ súlyvonala egyben oldalfelező merőleges is,	1 pont	<i>Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, jár ez a 2 pont.</i>
így a $BC$ oldalegyenes az $AF$ súlyvonalra $F$ -ben állított merőleges egyenes.	1 pont	
A $BC$ egyenes egyenlete tehát $x = -5$ .	1 pont	
A kör egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy $y_1 = 2\sqrt{3} - 2$ és $y_2 = -2\sqrt{3} - 2$ .	2 pont	
A szabályos háromszög másik két csúcsa: $B(-5; 2\sqrt{3} - 2)$ és $C(-5; -2\sqrt{3} - 2)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	<i>Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.</i>

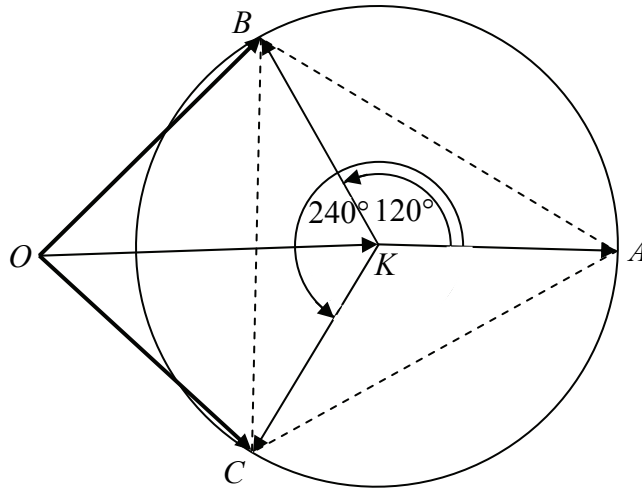
<b>6. a) második megoldás</b>		
Teljes négyzetre kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$ ,	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3; -2)$ . (sugara: $r = 4$ )	1 pont	
Mivel $KA$ szimmetriatengelye a háromszögnek, ezért $KAB$ és $KAC$ szögek 30 fokosak.	1 pont	
A $BA$ egyenes meredeksége így $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .	1 pont	
A $BA$ egyenes meredekségét és egy pontját ismerjük, ebből az egyenlete $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) - 2$ .	1 pont	
Ezt beírva a kör egyenletébe: $(x+3)^2 + (y+2)^2 - 16 =$ $= (x+3)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 16 =$	1 pont	
$= x^2 + 6x + 9 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - 16.$	1 pont	
Hárommal szorozva és rendezve: $4x^2 + 16x - 20 = 0.$	1 pont	
Ennek gyökei az 1 és a $-5$ .	1 pont	
(Az $x = 1$ az $A$ ponthoz tartozik.) Az $x = -5$ -höz tartozó $y$ érték a $2\sqrt{3} - 2$ , tehát $B(-5; 2\sqrt{3} - 2)$ ,	1 pont	
$C$ pont pedig a $B$ pontnak az $y = -2$ egyenesre vett tükörképe, azaz $C(-5; -2\sqrt{3} - 2)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	<i>Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.</i>

**6. a) harmadik megoldás**



Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16,$	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3; -2)$ és sugara: $r = 4.$	1 pont	
A körbe írt szabályos háromszög oldalának hosszát jelölje $a$ . A kör középpontja a szabályos háromszög súlypontja,	1 pont	
ezért $\frac{a\sqrt{3}}{3} = 4,$	1 pont	
ahonnan $a = 4\sqrt{3}.$	1 pont	
A szabályos háromszög másik két csúcsa illeszkedik az eredeti körre, és az $A(1; -2)$ középpontú, $a = 4\sqrt{3}$ sugarú körre is, ezért koordinátáik a két kör egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként adódnak.	1 pont	<i>Ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki, akkor is jár a pont.</i>
Ennek a körnek az egyenlete: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 48,$ vagy más alakban $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 43 = 0.$	1 pont	
A két kör egyenletét kivonva egymásból adódik, hogy $x = -5.$	1 pont	
Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy $y_1 = 2\sqrt{3} - 2$ és $y_2 = -2\sqrt{3} - 2.$	2 pont	
A szabályos háromszög másik két csúcsa: $B(-5; 2\sqrt{3} - 2)$ és $C(-5; -2\sqrt{3} - 2).$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	<i>Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.</i>

**6. a) negyedik megoldás**



Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja:

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16,$$

1 pont

ahonnan a kör középpontja:  $K(-3; -2)$ .  
(sugara:  $r = 4$ )

1 pont

A körbe írt (pozitív körüljárású)  $ABC$  szabályos háromszög  $B$ , illetve  $C$  csúcsát megkapjuk, ha az adott kör  $K$  középpontja körül elforgatjuk az  $A$  csúcsot  $+120^\circ$ -kal, illetve  $+240^\circ$ -kal.

2 pont

Forgassuk a  $\vec{KA}$  vektort.  $\vec{KA} = 4\mathbf{i}$ , azaz  $\vec{KA}(4; 0)$ .

1 pont

$$\text{Ekkor } \vec{KB} = 4 \cdot \left( -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} \right) = -2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j},$$

1 pont

$$\vec{KC} = 4 \cdot \left( -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} \right) = -2\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j}.$$

1 pont

Így a  $B$  csúcs helyvektora  $\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB} =$

1 pont

$= -5\mathbf{i} + (2\sqrt{3} - 2)\mathbf{j}$ , azaz a háromszög  $B$  csúcsa:  
 $B(-5; 2\sqrt{3} - 2)$ .

1 pont

A  $C$  csúcs helyvektora  $\vec{OC} = \vec{OK} + \vec{KC} =$

1 pont

$= -5\mathbf{i} - (2\sqrt{3} + 2)\mathbf{j}$ , azaz a háromszög  $C$  csúcsa:  
 $C(-5; -2\sqrt{3} - 2)$ .

1 pont

**Összesen: 11 pont**

*Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.*

<b>6. b)</b>		
A kérdéses valószínűség a beírt szabályos háromszög és a kör területének hányadosa.	2 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, akkor is jár a 2 pont.</i>
A kör területe: $T_k = r^2\pi$ .	1 pont	<i>Ha a vizsgázó a területek számszerű értékeivel számol (<math>T_k \approx 50,27</math> és <math>T_h \approx 20,78</math>), akkor is járnak ezek a pontok.</i>
Az $r$ sugarú körbe írt szabályos háromszög területe: $T_h = 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{3r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ .	1 pont	
A keresett valószínűség: $P = \frac{T_h}{T_k} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,41$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó százalékként adja meg két tizedesjegy pontossággal a választ (41,35%).</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. a)</b>		
16 nyomólemez óránként 1600 plakát elkészítését teszi lehetővé,	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, akkor is jár a pont.</i>
ezért a teljes mennyiséghez $\frac{14\,400}{1600} = 9$ óra szükséges.	1 pont	
A nyomólemezek előállítási költsége és a munkaidő további költségének összege: $16 \cdot 2500 + 9 \cdot 40\,000 = 400\,000$ Ft.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>7. b) első megoldás</b>		
Ha a nyomda $x$ db nyomólemezt alkalmaz, akkor ennek költsége $2500x$ forint.	1 pont	
Az $x$ db lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatása $\frac{14400}{100x} = \frac{144}{x}$ órát vesz igénybe,	1 pont	
és ez további $\frac{5,76 \cdot 10^6}{x}$ forint költséget jelent.	1 pont	
A két költség összege: $K(x) = 2500x + \frac{5,76 \cdot 10^6}{x}$ forint, ahol az $x$ pozitív egész.	1 pont	
Tekintsük a pozitív valós számok halmazán a $K$ utasítása szerint értelmezett függvényt!	1 pont*	
(Az így megadott $K$ függvénynek a minimumát keressük. A $K$ függvény deriválható, és minden $0 < x$ esetén) $K'(x) = 2500 - \frac{5,76 \cdot 10^6}{x^2}$ .	1 pont	
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $K'(x) = 0$ legyen.	1 pont	
$2500 - \frac{5,76 \cdot 10^6}{x^2} = 0$ , innen $x^2 = 2304$ ,	1 pont	
$x = 48$ (mert $0 < x$ ).	1 pont	
Annak igazolása, hogy az $x = 48$ (abszolút) minimumhely.	1 pont	A második derivált: $K''(x) = \frac{1,152 \cdot 10^7}{x^3}$ .
Azaz 48 nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség.	1 pont	
48 darab nyomólemez alkalmazása esetén a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege: $K(48) = 240\,000$ (forint).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

\*Megjegyzés:

Egy pont jár annak említéséért, hogy bár a valós számokon értelmezett függvényt írtunk fel, a feladat megoldása csak pozitív egész lehet (például: a 48 pozitív egész szám, ezért megoldása a feladatnak).



<b>7. b) második megoldás</b>		
Ha a nyomda $x$ db nyomólemezt alkalmaz, akkor ezek ára $2500x$ forint.	1 pont	
Az $x$ db lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatása $\frac{14400}{100x} = \frac{144}{x}$ órát vesz igénybe,	1 pont	
és ez további $\frac{5,76 \cdot 10^6}{x}$ forint költséget jelent.	1 pont	
A két költség összege: $K(x) = 2500x + \frac{5,76 \cdot 10^6}{x}$ forint (ahol $0 < x$ és $x$ egész).	1 pont	
(Ennek a minimumát keressük.) Számítási és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha csak a megoldásból derül ki, hogy ezt alkalmazza.</i>
$2500x + \frac{5,76 \cdot 10^6}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{2500x \cdot \frac{5,76 \cdot 10^6}{x}},$	2 pont	
$2500x + \frac{5,76 \cdot 10^6}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{1,44 \cdot 10^{10}} = 2,4 \cdot 10^5.$	1 pont	
(A két költség összege tehát nem lehet kevesebb 240 000 forintnál.) A 240 000 Ft akkor lehetséges, ha $2500x = \frac{5,76 \cdot 10^6}{x},$	1 pont	
amiből ( $x > 0$ miatt) $x = 48$ adódik.	1 pont	
A legkisebb költség tehát 48 darab nyomólemez alkalmazása esetén lép fel.	1 pont	
A nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költség ekkor összesen 240 000 forint. (A nyomdai előállítás 3 óráig tart, a nyomólemezek ára 120 000 forint, és ugyanennyi a ráfordított időből adódó további költség is.)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

**Megjegyzés:**

Ha a vizsgázó véges sok (akár csak néhány) eset vizsgálatával (pl. táblázattal, szisztematikus próbálkozással) arra a megállapításra jut, hogy 48 nyomólemez alkalmazása esetén lesz a legkisebb a költség, akkor erre a sejtésére kapjon 2 pontot.

A 48-hoz tartozó kétféle költség összegét kiszámolja: 240 ezer Ft. 1 pont

Ha a nyomólemezek száma 24 vagy kevesebb, akkor már csak a munkaórák száma miatt (legalább 6 munkaóra) legalább 240 ezer forint költség keletkezik, tehát ezeket az eseteket nem kell külön vizsgálni. 1 pont

Ha a nyomólemezek száma 96 vagy több, akkor már csak a nyomólemezek ára miatt is legalább 240 ezer Ft költség keletkezik, ezért ezeket az eseteket sem kell külön vizsgálni. 1 pont

Tehát a nyomólemezek száma több mint 24 és kevesebb, mint 96. 1 pont

A 25 és 95 közötti összes érték kiszámolása 5 pont

Evvel egyenértékű bármely helyes indoklás is 5 pontot ér (például a vizsgázó kevesebb lépésben, hibátlan logikával szűkíti a nyomólemezek lehetséges számát). Ha a monotonitást csak az egyik irányban sikerül bizonyítani, akkor 3 pontot kapjon, ha a monotonitást egyik irányban sem tudja bizonyítani, akkor ne kapjon pontot erre a részre.

A legkisebb költség tehát 48 darab nyomólemez alkalmazása esetén lép fel. 1 pont

Az utolsó pontot nem kaphatja meg, ha az előző, 5 pontos részre nem kapott pontot.

<b>8.</b>											
Legyen a négyzetes oszlop alapéleinek hossza $a$ (cm) és a magasság hossza $b$ (cm). (Az $a$ és $b$ számok 2-nél nagyobb egészek.) Mivel minden él hossza legalább 3,	1 pont	<i>Ha ezt a gondolatot a megoldás során jól használja, ez a 2 pont jár.</i>									
azoknak az egységkockáknak lesz pontosan két lapja piros, melyek az élek mentén, de nem a csúcokban helyezkednek el.	1 pont										
A két db négyzetlap 8 élén $8 \cdot (a - 2)$ ,	1 pont										
a 4 oldalélen $4 \cdot (b - 2)$ ilyen festett kocka van.	1 pont										
$8 \cdot (a - 2) + 4 \cdot (b - 2) = 28$ ,	1 pont										
innen $2a + b = 13$ .	1 pont										
Az élhosszak megfelelő értékei: <table border="1" style="margin: 5px auto; width: 80px;"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"><math>a</math></td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>b</math></td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> </tbody> </table>	$a$	5	4	3	$b$	3	5	7	6 pont	<i>A 6 pont a felírt diophantikus egyenlet helyes megoldásáért jár. Megfelelő <math>(a; b)</math> értékpáronként 2-2 pont.</i>	
$a$	5	4	3								
$b$	3	5	7								
A három lehetséges négyzetes oszlop	1 pont	<i>Ez a pont csak a három helyes adatpár esetén jár.</i>									
térfogata rendre $75 \text{ cm}^3$ , $80 \text{ cm}^3$ és $63 \text{ cm}^3$ .	3 pont										
<b>Összesen:</b>	<b>16 pont</b>	<i>Ha a vizsgázó indoklás nélkül közli a három lehetséges négyzetes oszlop méreteit, és megadja a térfogatokat, legfeljebb 6 pontot kaphat.</i>									

<b>9.</b>		
$\sin x \cdot \cos y = 0 \quad (1)$ $\sin x + \sin^2 y = \frac{1}{4} \quad (2)$ Az (1) egyenletről, felhasználva, hogy egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik szorzótényezője 0, adódnak a következő esetek: a) $\sin x = 0$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó feltétel miatt három $x$ érték tesz eleget az (1) egyenletnek ( $x_1 = 0$ ; $x_2 = \pi$ ; $x_3 = 2\pi$ ).	1 pont	
A $\sin x = 0$ feltételt behelyettesítve a (2) egyenletbe: $\sin^2 y = \frac{1}{4}$ ,	1 pont	
tehát $\sin y = \frac{1}{2} \quad (*)$ ,	1 pont	
vagy $\sin y = -\frac{1}{2} \quad (**)$	1 pont	
Az első (*) egyenletnek a feltétel miatt két $y$ érték tesz eleget $\left( y_1 = \frac{\pi}{6}; y_2 = \frac{5\pi}{6} \right)$ .	1 pont	
A második (**) egyenletnek a feltétel miatt két $y$ érték tesz eleget $\left( y_3 = \frac{7\pi}{6}; y_4 = \frac{11\pi}{6} \right)$ .	1 pont	
Így összesen négy $y$ érték tesz eleget az egyenletrendszernek ebben az esetben.	1 pont	
Tehát ebben az esetben összesen $3 \cdot 4 = 12$ darab $(x; y)$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek.	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha rossz eredményt ad meg a lehetséges <math>x</math> és az <math>y</math> értékek számára, de helyesen összeszorozza ezeket a számokat.</i>

b) $\cos y = 0$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó feltétel miatt két $y$ érték tesz eleget a (1) egyenletnek $\left( y_5 = \frac{\pi}{2}; \quad y_6 = \frac{3\pi}{2} \right)$ .	1 pont	
Ha $\cos y = 0$ , akkor $\sin^2 y = 1$ ,	1 pont	
amit behelyettesítve a (2) egyenletbe: $\sin x = -\frac{3}{4}$ ,	1 pont	
ami a $[0; 2\pi]$ intervallumban két $x$ értékre teljesül $(x_1 \approx 3,9897 \quad x_2 \approx 5,4351)$ .	1 pont	
Ebben az esetben $2 \cdot 2 = 4$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek.	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha rossz eredményt ad meg a lehetséges <math>x</math> és az <math>y</math> értékek számára, de helyesen összeszorozza ezeket a számokat.</i>
(Az a) és b) esetben különböző számpárokat kaptunk, így) összesen $12 + 4 = 16$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>16 pont</b>	
<p><i>Megjegyzések:</i></p> <p>1. Ha a vizsgázó megoldása során feltétel nélkül oszt <math>\sin x</math> vagy <math>\cos y</math> kifejezéssel, megoldására legfeljebb 11 pontot kaphat.</p> <p>2. A feladat megoldásához nem tartozik hozzá a számpárok megadása. Ezért a „vissza-keresésnél” elkövetett hibákért ne vonjunk le pontot!</p> <p>3. Ha a vizsgázó fokokban helyesen végezte a számításokat, akkor is teljes pontszámot kaphat.</p>		