ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2010. május 4.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A harmadik oldal 8 cm hosszú.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
8 600-zal.	2 pont	*Hibás előjelért 1 pontot veszítsen!*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
Az **a**+**b** vektor koordinátái: (1; 5).	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$x = -2$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
B és	1 pont	*Ha a felsoroltak között hibásat is megjelenít, 0 pontot kap!*
C	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A zérushely fogalmának ismerete (pl. $5x-3=0$).	1 pont	
A függvény zérushelye: $x=\frac{3}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A hasáb magassága 8 cm hosszú.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

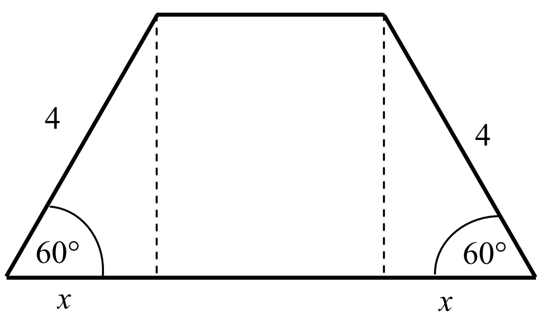
8.		
$\frac{47{,}3}{9460}$;	2 pont	*Az arány helyes megjelenítéséért*
47,3 milliárd km = 0,005 fényév ($=5\cdot10^{-3}$ fényév).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
A kör középpontja (0; –1),	2 pont	*Koordinátánként 1-1 pont.*
sugara 2 (egység).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
Lehetséges megoldások: (1; 2; 6); (2; 2; 5).	3 pont	*Bármelyik helyes adathalmaz 3 pontot ér. Ha a számítás a feltételek nem mindegyikét teljesíti, legfeljebb 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**3 pont**	

11.		
(A vesztes 1632 szavazatot kapott, ez a „kedvező” esetek száma. Az összes eset száma a választásra jogosultak száma.) A kérdezett valószínűség: $\frac{1632}{12608} (\approx 0{,}129)$.	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.



A helyes ábra.	1 pont	
x = 2 (cm), szabályos háromszöggé kiegészítéssel vagy szögfüggvénnyel.	2 pont	
Innen 7-2x = 3 (cm) a rövidebbik alap.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

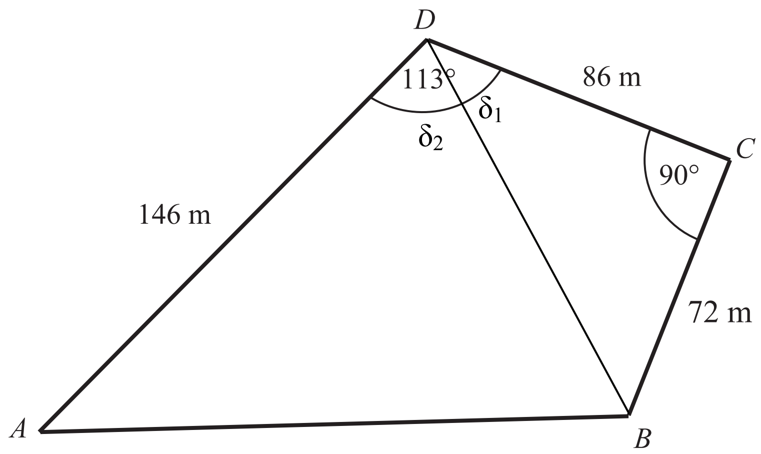
II/A.

13. a)		
f zérushelyei: $x_1 = 2$,	1 pont	
$x_2 = -6$.	1 pont	
Az értékkészlet $[-4; 4]$.	1 pont	*A jó halmaz bármilyen megadása 1 pont.*
A legkisebb függvényérték –4.	1 pont	
Ezt az $x = -2$ helyen veszi fel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
A hozzárendelés képlete: $f(x) = \|x+2\| - 4$.	4 pont	*Egy-egy konstans helyes megadása 2-2 pont.*
Összesen:	**4 pont**	

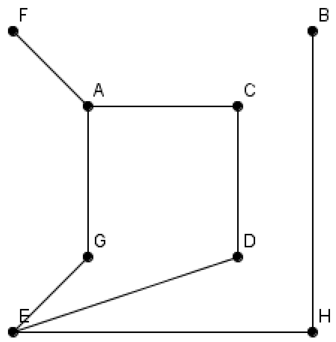
13. c)		
$x_1 = 0 \quad x_2 = -4$	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	
Algebrai megoldás esetén az esetszétválasztás felismerése 1 pont, a két gyök 1-1 pont. Grafikus megoldásnál a két gyök leolvasása 1-1 pont, ellenőrzés 1 pont.		

14.



Bontsuk a négyszöget két háromszögre!	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való megjelenése esetén is jár az 1 pont.*
(A *BCD* háromszögből Pitagórasz tételével) $BD^2 = BC^2 + CD^2$.	1 pont	
$BD = \sqrt{86^2 + 72^2} = \sqrt{12580} = 112{,}16$.	2 pont	
$tg\delta_1 = \frac{72}{86}$,	1 pont	
$\delta_1 \approx 39{,}94°$.	1 pont	* $\delta_1 \approx 40°$ *is elfogadható*
$\delta_2 \approx 113° - 39{,}94° = 73{,}06°$.	1 pont	* $\delta_2 \approx 73°$ *is elfogadható*
$T_{ABD} = \frac{146 \cdot 112{,}16 \cdot \sin 73{,}06°}{2} \approx 7832{,}42$	2 pont	
$T_{BCD} = \frac{86 \cdot 72}{2} = 3096$	1 pont	
(A négyszög területe a két háromszög területének összegeként számolható:) $T = T_{ABD} + T_{BCD} \approx 7832{,}42 + 3096 = 10928{,}42$.	1 pont	
A telek területe (százasokra kerekítve) 10 900 m^2.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

15. a)		
Mivel hét embernek kellett értesülnie a nyaralásról, ezért legalább hét telefonhívás zajlott le.	2 pont	*Indoklás nélkül is jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

15. b)		
	6 pont	*András – Cili, András– Feri élekért 1 pont. Cili– Dani él 1 pont. Gabi– András él 1 pont. Hedvig– Balázs él 1 pont. Eszter három éléért 2 pont. Minden egyes hibás él (–1) pont.*
Összesen:	**6 pont**	*Indoklás nélküli helyes ábra 6 pontot ér.*

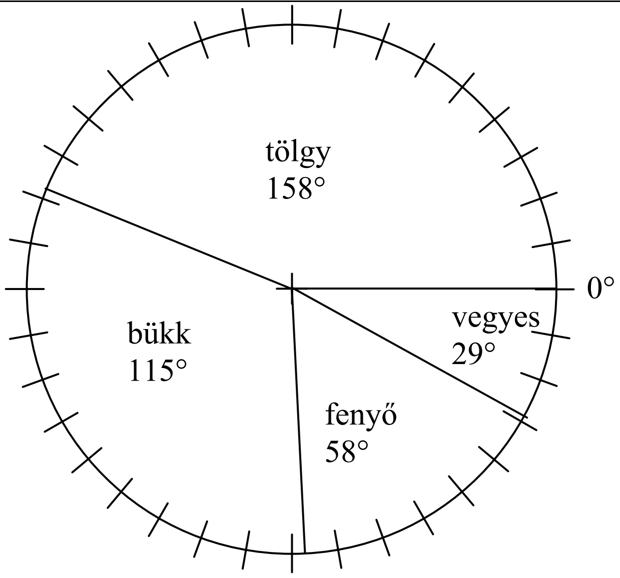
15. c) első megoldás		
Nyolc emberből hármat az első fülkébe $\binom{8}{3} = (56)$,	1 pont	
a maradék 5 személyből hármat a második fülkébe $\binom{5}{3} = (10)$-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
A kimaradt két személy megy a harmadik fülkébe (1 lehetőség).	1 pont	
560-féleképpen helyezkedhettek el a három fülkében, tehát a kérdésre igen a válasz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c) második megoldás		
A nyolc tanulót rakjuk sorba. Minden tanuló vagy F1 (első fülke), vagy F2 (második fülke), vagy F3 (harmadik fülke) jelzést kap.	1 pont	
Három F1, három F2 és két F3 jelzést kell kiosztani. Ha ez mind különböző lenne, akkor 8! lenne az összes eset.	1 pont	
Viszont a fülkén belüli 3-3-2 szabad hely ismétlődése miatt $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} =$	1 pont	
= 560 módon ülhettek le a nyolc szabad helyre.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II/A.

16. a)		
A mértani sorozat első tagja 29 000, a hányadosa 1,02.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való megjelenése esetén is jár az 1 pont.*
(A 11 év utáni mennyiség a sorozat 12. tagja.) $(a_{12} =)\ a_1 \cdot q^{11} = 29\,000 \cdot 1{,}02^{11}$.	2 pont	*A helyes modell alkalmazása 1 pont, a behelyettesítés 1 pont.*
$a_{12} \approx 36\,057{,}86$.	1 pont	
11 év múlva (ezresekre kerekítve) 36 000 m^3 fa lesz az erdőben.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)



A tölgytől különböző fák 56%-ot tesznek ki (a bükk, a fenyő és az egyéb egy mértani sorozat szomszédos tagjaiként).	1 pont	*Bükkfa az állomány b%-a, vegyes az állomány e%-a, fenyőfa az állomány 16%-a.*
A fenyő 16%, a bükk $16q$ %, a vegyes $\frac{16}{q}$ %.	1 pont	$b+e=40$.
$\frac{16}{q}+16+16q=56$. $\left(16q^2-40q+16=0\right)$	2 pont	$\frac{b}{16}=\frac{16}{e}$. *A behelyettesítő módszerrel az* $e^2-40e+256=0$ *egyenlethez jutunk.*
Ebből q = 2 vagy q = 0,5	2 pont	*Ennek megoldása:* $e=32$, *illetve* $e=8$.
Mivel a vegyes kevesebb, mint a fenyő, ezért csak q = 2 lehetséges.	1 pont	*Mivel fenyőből nagyobb az állomány, mint az vegyes fafajtákból, ezért* $e=8$ *és* $b=32$.
Azaz bükk 32%, vegyes 8%	1 pont	
Ekkor a kördiagramon a szögek rendre: tölgy: 158°, bükk: 115°, fenyő: 58°, vegyes: 29°.	2 pont	*Ha 1 hibás szöget tüntet fel, 1 pontot kap, két hibás szög: 0 pont.*
Helyes kördiagram.	2 pont	
Összesen:	**12 pont**	

17. a)		
0°; 90°; 180°; 270°; 360° kivételével a tartomány minden szögére értelmezett.	2 pont	*Ha a felsorolásban hibás szög van (pl. nem esik a kívánt tartományba), vagy 1 vagy 2 hiányzik belőle, akkor 1 pontot kaphat.*
$\frac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 - \operatorname{tg} x$.	1 pont	
$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 4 = 0$.	1 pont	
Innen $\operatorname{tg} x = 1$, vagy	1 pont	
$\operatorname{tg} x = 4$.	1 pont	
Ebből: $x_1 = 45°$; $x_2 = 225°$	2 pont	
$x_3 \approx 75{,}96°$; $x_4 \approx 255{,}96°$.	2 pont	
Mind a négy gyök megfelel.	1 pont	*Fogadjuk el a közelítő ellenőrzést is.*
Összesen:	**11 pont**	

17. b)		
$\lg(x-3) + \lg 10 = \lg x$.	2 pont	
$\lg 10(x-3) = \lg x$.	1 pont	
(A logaritmus függvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt) $10(x-3) = x$.	1 pont	
$x = \frac{10}{3}$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. a) **első megoldás**		
Esetünkben a hat húzás mindegyikében 88-féleképpen lehet jót húzni, azaz a kedvező esetek száma 88^6.	2 pont	*Ha a gondolatok csak a képletben jelennek meg, az 2 pontot ér.*
Az összes lehetőség mindegyik húzásnál 100, tehát az összes lehetséges húzások száma 100^6.	2 pont	
Ezzel a keresett valószínűség: $\frac{88^6}{100^6} = 0{,}88^6 \approx 0{,}4644$.	1 pont	*A két tizedes jegyre kerekített értéket is elfogadjuk.*
Összesen:	**5 pont**	

18. a) **második megoldás**		
A „jó készülék” húzásának esélye 0,88,	1 pont	*Ha a gondolatok csak a képletben jelennek meg, az 2 pontot ér.*
amely egymástól független eseményként	1 pont	
hatszor ismétlődik.	2 pont	
A keresett valószínűség: $0{,}88^6 \approx 0{,}4644$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b)		
Első esemény („nincs hibás”).		
A 100 készülékből 6-ot $\binom{100}{6}$-féleképpen lehet kiválasztani, ez az összes esetek száma.	2 pont	
Ezek között $\binom{88}{6}$ esetben mind a 6 kiválasztott készülék jó.	1 pont	
Tehát a keresett valószínűség: $\frac{\binom{88}{6}}{\binom{100}{6}}$.	1 pont	
A „*nincs hibás*” esemény bekövetkezésének valószínűsége: $\frac{88\cdot87\cdot86\cdot85\cdot84\cdot83}{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96\cdot95}=\frac{541\,931\,236}{1\,192\,052\,400}\approx 0{,}455$.	1 pont*	*A két tizedesjegyre kerekített értéket is elfogadjuk.*
Második esemény („legalább két hibás van”). **Első megoldás.**		
A „*legalább két hibás van*” esemény komplementere a „*legfeljebb 1 hibás van*”.	2 pont	
Ez utóbbi esemény két, egymást kizáró esemény összege, nevezetesen a „*0 hibás van*” és az „*1 hibás van* ” eseményeké.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a leírt gondolatmenet a megoldásból derül ki.*
Ezek valószínűségét összeadva kapjuk a komplementer esemény bekövetkezésének valószínűségét:	1 pont	
$\frac{\binom{88}{6}}{\binom{100}{6}}+\frac{\binom{88}{5}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{100}{6}}\approx 0{,}455+0{,}394=0{,}849$	1 pont	*A két tizedesjegyre kerekített értéket is elfogadjuk; Ha korábbról így számol, akkor például 0,84 is elfogadható.*
A „legalább két hibás van” esemény bekövetkezésének valószínűsége: 1–0,849, azaz kb. 0,151.	1 pont*	*A két tizedesjegyre kerekített értéket is elfogadjuk, viszont, ha korábbról így számol, akkor 0,16 is elfogadható.*

Második esemény („legalább két hibás van”).	**Második megoldás.**	
Összeadjuk a *„pontosan 2, 3 4, 5, 6 hibás van”* események valószínűségeit, azaz $P(X=2)=\frac{\binom{88}{4}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{100}{6}}\left(\approx 0{,}1291\right)$ $P(X=3)=\frac{\binom{88}{3}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{100}{6}}\left(\approx 0{,}0203\right)$ $P(X=4)=\frac{\binom{88}{2}\cdot\binom{12}{4}}{\binom{100}{6}}\left(\approx 0{,}0016\right)$ $P(X=5)=\frac{\binom{88}{1}\cdot\binom{12}{5}}{\binom{100}{6}}\left(\approx 5{,}85\cdot 10^{-5}\right)$ $P(X=6)=\frac{\binom{88}{0}\cdot\binom{12}{6}}{\binom{100}{6}}\left(\approx 7{,}7\cdot 10^{-7}\right)$	5 pont	*1–1 pont eseményenként.*
A *„legalább két hibás van*” esemény bekövetkezésének valószínűsége: ≈0,1291 + 0,0203 + 0,0016 + 0,0001 + 0,000 = = 0,151.	1 pont*	*A két tizedes jegyre kerekített értéket is elfogadjuk.*
Válasz:		
Tehát az első esemény bekövetkezése a valószínűbb.	1 pont*	
Összesen:	**12 pont**	
*A *-gal jelzett 3 pontot megkapja abban az esetben is, ha a két valószínűség numerikus értékét nem számítja ki, de a nagyságuk közötti viszonyt más úton jól bizonyítja.*		