ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2010. május 4.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)		
Az értelmezési tartományon minden x esetén $f(x)=(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\cdot\sin 2x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\sin 2x=$	1 pont	
$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\cdot 2\sin x\cos x=$	1 pont	
$=2$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. b) első megoldás		
A g függvény páros függvény, mivel $g(x)=g(-x)$ minden $x\in D_g$ esetén.	1 pont	
Az $(7\geq)\,x\geq 0$ esetén vizsgáljuk a g zérushelyeit. Ekkor $g(x)=x^2-6x=x(x-6)$. Ezen a tartományon a zérushelyek: 0 és 6.	1 pont	
A g függvénynek három zérushelye van: –6; 0; 6.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. b) második megoldás		
$g(x)=\begin{cases}x^2-6x=x(x-6) & \text{, ha } (7\geq)\,x\geq 0\\ x^2+6x=x(x+6) & \text{, ha } (-7\leq)\,x\leq 0\end{cases}$,	2 pont	*Az esetszétválasztás 1 pont, megfelelő tartományok megjelölése 1 pont. (Ha csak az egyik esetet írja tartománnyal együtt, 1 pontot kap.)*
ezért a g függvénynek három zérushelye van: –6; 0; 6.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Elvi hiba miatt nem kap pontot, ha g(x) helyett a h(x)=x^2-6x-et vizsgálja.*

1. c)		
A $g(x)$ kifejezést átalakíthatjuk: $g(x)=\begin{cases} x^2-6x=(x-3)^2-9 \\ x^2+6x=(x+3)^2-9 \end{cases}$, ha $\begin{matrix} 0\le x\ (\le 7) \\ (-7\le)\ x\le 0 \end{matrix}$, innen következik, hogy	2 pont	*Teljes értékű megoldás a grafikus módszer is, de indoklás nélküli rajz esetén 1 pont jár.*
a legkisebb függvényérték $g(3)=g(-3)=-9$,	1 pont	
a legnagyobb függvényérték $g(7)=g(-7)=7$.	1 pont	
A g (folytonos) függvény értékkészlete: $R_g=[-9;7]$.	2 pont	*Jó tartalom hibás jelöléssel 1 pontot ér.*
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. *Maximum 4 pontot kaphat, ha*
   a) nem veszi figyelembe az értelmezési tartományt, vagy
   b) grafikus megoldást ad, és a grafikonja nem függvénygrafikon (pl. mindkét képlettel megadott másodfokú függvényt a teljes értelmezési tartományra felvázolja).
2. *Ha a b) kérdésnél említett h(x)-szel dolgozik, a c) részre legfeljebb 3 pontot kaphat.*

2. a)		
Az 1, a 2, a 4 és a 8 külön csoportba kell, hogy kerüljön.	1 pont	*Ha ez a gondolat mind a 2 csoportosításban helyesen jelenik meg, az 1 pont jár.*
Az 1-es mellett nem lehet más szám.	1 pont	*Ha ez a gondolat mind a 2 csoportosításban helyesen jelenik meg, az 1 pont jár.*
Egy lehetséges beosztás: (1), (2, 3), (4, 5, 6, 7), (8, 9)	1 pont	
egy másik: (1), (2, 3, 5), (4, 6, 7), (8, 9)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha csak egy beosztás jó, 2 pontot kap.*

2. b)		
Berci minden számot összekötött minden számmal,	1 pont	
kivéve a szomszédos számokat: 1-2, 2-3, 3-4, …, 8-9. (Egy 9-csúcsú teljes gráf éleiből hagyunk el nyolcat.)	1 pont	
$\binom{9}{2}-8=$	1 pont	*Binomiális együttható nélkül is elfogadható.*
$\frac{9\cdot 8}{2}-8=28$ vonalat húzott be Berci.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha ábra segítségével helyesen adja meg a gráf éleinek számát, a megoldás teljes értékű.*
Megjegyzés: *Ha a kilencszög átlóit számolja össze (27), és nem veszi figyelembe, hogy az 1-9 oldalél is szükséges, 3 pontot kap.*		

2. c) első megoldás		
A számok egy permutációja hármas bontásban egy duót ad.	2 pont	*Ha ezek a gondolatok megjelennek a megoldás során, járnak a pontok.*
Ha számítana a két háromjegyű szám sorrendje a duón belül, akkor annyi duó lenne, ahány permutációja van a 6 számnak (6!).	1 pont	
Így az eseteket duplán számoltuk,	1 pont	
tehát $\frac{6!}{2}=$ 360 darab duó van.	1 pont	*Hibás válasz esetén ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

2. c) második megoldás		
Az egyik hármast kiválaszthatjuk $\binom{6}{3}$-féle módon, a másik hármas ezzel meghatározott.	1 pont	
Mindkét hármasból 3! –féle számot képezhetünk.	1 pont	
Összesen $\binom{6}{3}\cdot 3!\cdot 3!(=720)$ duót képeztünk.	1 pont	
Így minden esetet kétszer számoltunk,	1 pont	
tehát 360- féle duó van.	1 pont	*Hibás válasz esetén ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

3.		
Legyen a sorozat első tagja a, hányadosa q. $a + aq + aq^2 = 91$	1 pont	
$aq^5 + aq^6 + aq^7 = 2912$	1 pont	
$q^5\left(a + aq + aq^2\right) = 2912$	1 pont	
$q^5 = \dfrac{2912}{91}\,(= 32)$	1 pont	
Ebből $q = 2$.	1 pont	
Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $7a = 91$, ahonnan $a = 13$. (Ezek szerint a mértani sorozat: $a = 13$, $q = 2$, $a_n = 13 \cdot 2^{n-1}$.)	1 pont	
A kérdés: hány n-re igaz, hogy $10^{12} \le 13 \cdot 2^{n-1} < 10^{13}$.	2* pont	*A kitevők eltévesztése esetén ez a 2 pont nem jár. Helyes irányú, de nem pontosan felírt relációs jelek esetén 1 pont jár.*
Ezzel ekvivalens (az lg x függvény szigorúan monoton növekvő),	1* pont	
$12 \le \lg 13 + (n-1)\lg 2 < 13$.	1* pont	
$37{,}16 < n < 40{,}48$	1* pont	
Ennek egész megoldása a 38, a 39 és a 40.	1* pont	
A sorozatnak 3 tagja tizenhárom jegyű.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

Megjegyzések:

*1. A *-gal jelölt pontok számológépes megoldás esetén akkor járnak, ha megállapítja, hogy*

- *a sorozat szigorúan monoton növekvő* 2 pont;
- *n=37 még nem megfelelő* 1 pont;
- *n=41 már nem megfelelő* 1 pont;
- *a 38., 39. és 40. tag valóban megfelel* 2 pont.

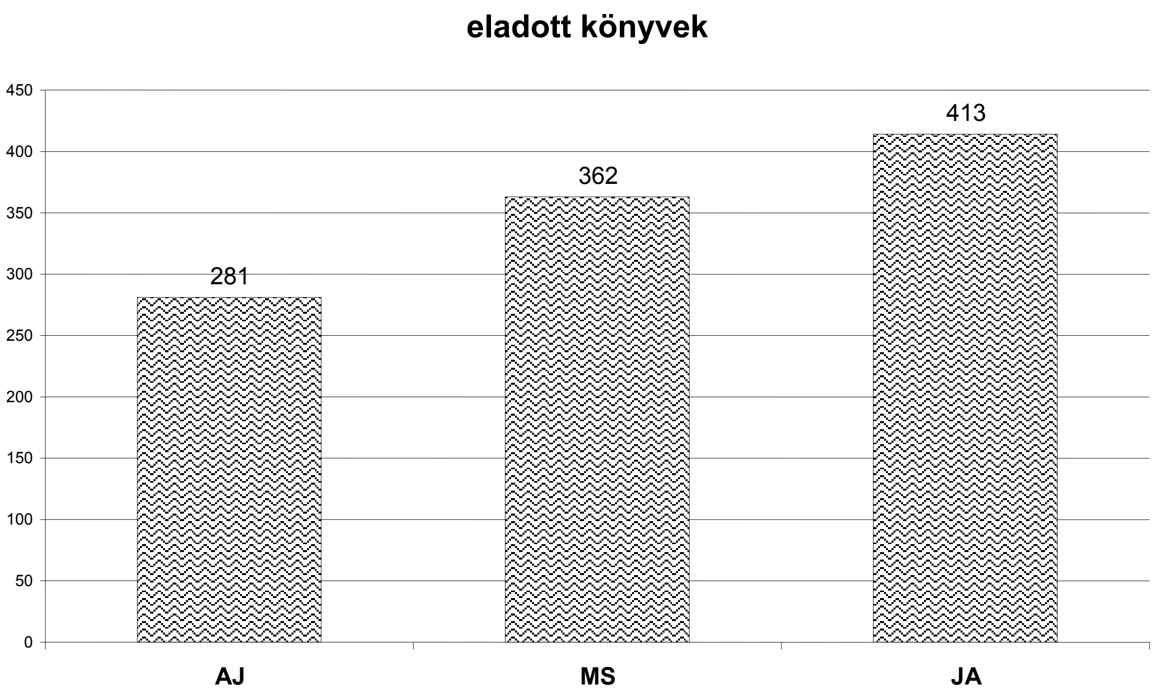
*2. Megfelelő magyarázat nélküli próbálkozások esetén a *-gal jelölt 6 pontból legfeljebb 3 pont adható.*

4. a)		
A kördiagramok alapján:		

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János	119	90	72	281
Márai Sándor	119	126	117	362
József Attila	170	216	27	413
Összesen	408	432	216	

helyes oszloponként 1-1 pont.	4 pont	*A negyedik pont az első három oszlop adatainak helyes összegezéséért jár.*
A legtöbb példányt József Attila műveiből adták el.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b)



Jó adatokat tüntet fel.	1 pont	
Arányos a diagram. Célszerűen választ egységet.	1 pont	
Rendezett az ábrája, világosan látni, mi-mit jelöl.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Ezen kívül csak olyan diagram fogadható el, amelyiken a két tengely fel van cserélve.*

4. c)		
A vizsgált időszakban a sorsoláson résztvevő sorsjegyek száma: 408+432+216 = 1056.	1 pont	*Az 1056 megjelenéséért (akár a táblázatban is).*
Ezek közül a 2 nyerő sorsjegyet összesen $\binom{1056}{2}$ féleképpen lehet kisorsolni.	1 pont	*Az összes esetek száma 1 pont, a kedvező eseteké 1 pont. Ha a kedvező és az összes esetek számát is a sorrend figyelembevételével helyesen számolja össze, akkor is jár az 1-1 pont.*
A 2. üzletben 126 Márai-könyvhöz adtak sorsjegyet, ezek közül $\binom{126}{2}$ féleképpen lehet 2 nyerőt kiválasztani.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{126}{2}}{\binom{1056}{2}}$,	1 pont	*Ha a k/n képletet előzmény nélkül használja, nem jár pont.*
ennek értéke: $\left(p=\frac{7875}{557040}\right)\approx 0{,}014$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II.

5. a) első megoldás

	1.	2.	3.		
ár	$1{,}5x$	$1{,}25\cdot 1{,}5x = 1{,}875x$	x	4 pont	*Az 1. ára a 3.-hoz képest 2 pont. A 2. ára a 3.-hoz képest 2 pont.*
tömeg	$1{,}5\cdot 0{,}8y = 1{,}2y$	$1{,}5y$	y	4 pont	*Az 1. tömege a 3.-hoz képest 2 pont. A 2. tömege a 3.-hoz képest 2 pont.*
$\text{egységár} = \dfrac{\text{ár}}{\text{tömeg}}$	$\dfrac{1{,}5x}{1{,}2y} = 1{,}25\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{1{,}875x}{1{,}5y} = 1{,}25\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{y}$	4 pont	*Cellánként 1-1 pont.*
Tehát a harmadik kiszerelés egységára a legalacsonyabb.				1 pont	
			Összesen:	**13 pont**	

5. a) második megoldás

	1.	2.	3.		
ár	x	$1{,}25x$	$\frac{2}{3}x$	4 pont	*Az 2. ára a 1.-höz képest 2 pont. A 3. ára az 1.-höz képest 2 pont.*
tömeg	$0{,}8y$	y	$\frac{2}{3}y$	4 pont	*Az 1. tömege a 2.-hoz képest 2 pont. A 3. tömege a 2.-hoz képest 2 pont.*
$\text{egységár} = \dfrac{\text{ár}}{\text{tömeg}}$	$\dfrac{x}{0{,}8y} = 1{,}25\dfrac{x}{y}$	$1{,}25\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{y}$	4 pont	*Cellánként 1-1 pont.*
Tehát a harmadik kiszerelés egységára a legalacsonyabb.				1 pont	
			Összesen:	**13 pont**	

5. a) **harmadik megoldás**					
	tömeg	egységár	ár = egységár és a tömeg szorzata		
1. kiszerelés	1,2 m	1,25 e	1,5 em	4-4-4 pont oszloponként vagy soronként	*Az 1. tömege a 3.-hoz képest 2 pont. A 2. tömege a 3.-hoz képest 2 pont. Az 1. ára a 3.-hoz képest 2 pont. A 2. ára a 3.-hoz képest 2 pont.*
2. kiszerelés	1,5 m	1,25 e	1,875 em		
3. kiszerelés	m	e	em		
Tehát a harmadik kiszerelés egységára a legalacsonyabb.				1 pont	
Összesen:				**13 pont**	

5. b)		
Ha a legolcsóbb kiszerelés egységára 600 Ft, a másik kettőé ennek 125%-a, azaz 750-750 Ft.	1 pont	
A három kiszerelés átlagos egységára: $\frac{600+750+750}{3}\left(=700\right)$.	1 pont	
A negyedik kiszerelésen 700 Ft egységár szerepelt.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. a)		
(Az f integrálható függvény.) $\int_0^a \left(-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a\right)dx=\left[-\frac{x^4}{a}+\frac{x^3}{a}+\frac{x^2}{a}-ax\right]_0^a=$	4 pont	*Tagonként 1-1 pont jár.*
$=-\frac{a^4}{a}+\frac{a^3}{a}+\frac{a^2}{a}-a^2=$	1 pont	
$=-a^3+a$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b)		
Megoldandó (az $a\in \mathbf{R}^+$ feltétel mellett) a $-a^3+a\geq 0$ egyenlőtlenség.	1 pont	
$(a+1)\cdot a\cdot(1-a)\geq 0$	1 pont	
Mivel $a>0$, így az első két tényező pozitív, ezért $1-a\geq 0$.	1 pont	
Az a lehetséges értékeinek figyelembe vételével: $0<a\leq 1$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Ha az egyenlőtlenséget a harmadfokú függvény grafikonjának vázlata alapján helyesen oldja meg, megoldása teljes értékű.		

6. c)		
(A nyílt intervallumon értelmezett ($x\in \mathbf{R}^+$) g függvény differenciálható.) $g'(x)=-3x^2+1$.	1 pont	
A lehetséges szélsőértékhely keresése: $-3x^2+1=0$	1 pont	
A lehetséges szélsőértékhely: $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ez van benne az értelmezési tartományban);	1 pont	
$g''(x)=-6x$	1 pont	
$g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$	1 pont	
Tehát az $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ lokális maximumhely.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
Ha a lokális szélsőértékhelyek létezéséről az első derivált előjelváltásával ad elégséges feltételt, teljes pontszámot kap.		

7. a)

az egyenes	x tengelyen lévő pontja	y tengelyen lévő pontja
$DA: \quad 3x-4y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;-5)$
$AB: \quad 3x+5y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;4)$
$BC: \quad 4x-3y+12=0$	$(-3;0)$	$(0;4)$
$CD: \quad 5x+3y+15=0$	$(-3;0)$	$(0;-5)$

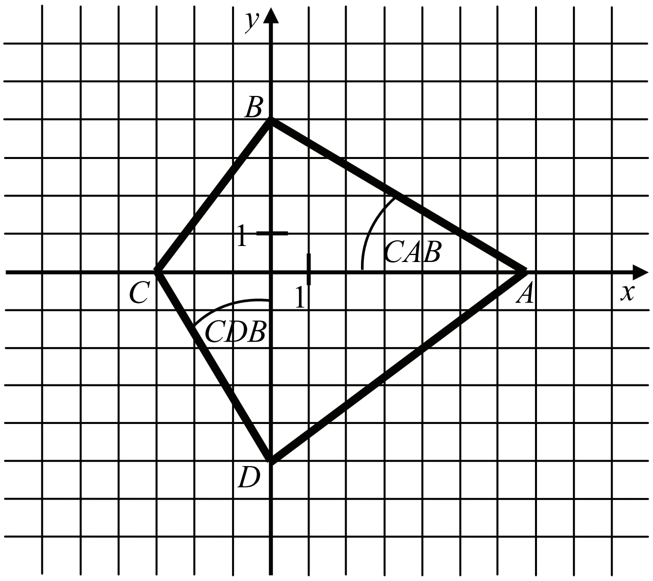
Az DA és az AB egyenesek metszéspontja az x-tengely $A=\left(\frac{20}{3};0\right)$ pontja.	1 pont	*Indoklás nélkül felírt csúcspontok megadásáért nem jár pont.*
Az AB és az BC egyenesek metszéspontja az y-tengely $B=(0\ ;\ 4)$ pontja.	1 pont	
Az BC és az CD egyenesek metszéspontja az x-tengely $C=(-3\ ;\ 0)$ pontja.	1 pont	
Az CD és az DA egyenesek metszéspontja az y-tengely $D=(0;-5)$ pontja.	1 pont	
A csúcspontok alapján beláttuk, hogy az $ABCD$ négyszög AC átlója az x-, BD átlója az y-tengelyre illeszkedik.	1 pont	

Felírjuk az oldalegyenesek egy-egy normálvektorát (irányvektorát vagy iránytangensét).

az egyenes	egy normálvektor	(egy irányvektor)	(iránytangens)
$DA: 3x-4y-20=0$	$(3\ ;-4)$	$(4;3)$	$\frac{3}{4}$
$AB: 3x+5y-20=0$	$(3\ ;\ 5)$	$(5\ ;-3)$	$-\frac{3}{5}$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(4\ ;-3)$	$(3\ ;\ 4)$	$\frac{4}{3}$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(5\ ;\ 3)$	$(3\ ;-5)$	$-\frac{5}{3}$

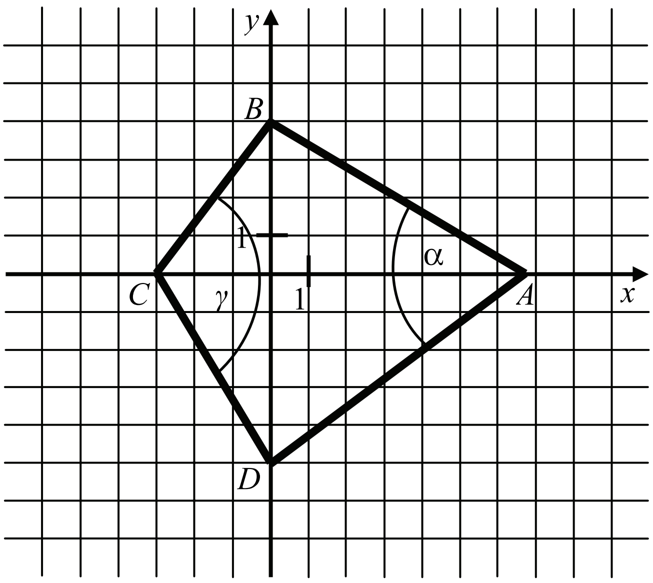
	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, kettő, vagy több hiba esetén 0 pont adható.*
A normálvektorok között és ezért az egyenesek közt sincs két egymásra merőleges, (skalárszorzat nem 0), ezért az $ABCD$ négyszögnek nincs derékszöge.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. b) első megoldás



Megvizsgáljuk, hogy pl. a *CB* szakaszt az *A* és *D* csúcsokból azonos szög alatt látjuk-e.	1 pont	
Ha a szögek nem azonos nagyságúak, akkor az *ABCD* nem húrnégyszög.	1 pont	*Ha az indoklás nem ennyire részletes, akkor is járnak a megfelelő pontok.*
Ha a szögek azonos nagyságúak, akkor a *CB* szakasz látókörív alakzatán van az *A* és a *D* pont is. Mivel a *CB* egyenes azonos partján van az *A* és a *D* pont is, ez azt jelenti, hogy az *ABCD* pontok egy körív pontjai, vagyis az *ABCD* négyszög húrnégyszög.	1 pont	
Mivel az *ABCD* négyszög átlóinak metszéspontja az origó, ezért a *CDB* és a *CAB* szögeket a *COD,* illetve a *BOA* derékszögű háromszögekben vizsgálhatjuk.	1 pont	
Ezek a derékszögű háromszögek hasonlóak,	1 pont	
mert befogóik aránya egyenlő: $\frac{CO}{DO}=\frac{3}{5}$, illetve $\frac{OB}{OA}=\frac{4}{\frac{20}{3}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.	1 pont	
A két vizsgált szög tehát egyenlő.	1 pont	
Az *ABCD* négyszög tehát húrnégyszög.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. b) második megoldás



Legyen $\gamma = BCD\sphericalangle$ és $\alpha = DAB\sphericalangle$ Vektorok skalár-szorzatával fogjuk kiszámítani két szemközti szög koszinuszát. $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}$,	1 pont	
ahol $\overrightarrow{CB} = (3\ ;\ 4)$ és $\overrightarrow{CD} = (3\ ;-5)$,	1 pont	
$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = -11$, $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 5$ és $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{34}$.	1 pont	
$\cos\gamma = -\dfrac{11}{5\sqrt{34}}$.	1 pont	
$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$, ahol $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{20}{3}\ ;\ 4\right)$ és $\overrightarrow{AD} = \left(-\dfrac{20}{3}\ ;\ -5\right)$;	1 pont	
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{220}{9}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \dfrac{\sqrt{544}}{3}$ és $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \dfrac{25}{3}$.	1 pont	
$\cos\alpha = \dfrac{11}{5\sqrt{34}}$.	1 pont	
A γ és az α szögek tehát kiegészítő szögek, az *ABCD* négyszög húrnégyszög.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:

1. *Ha a b) állítás vizsgálatakor közelítő értékekkel dolgozik, legfeljebb 4 pontot kaphat a 8 pont helyett.*
2. *Addíciós képlettel is dolgozhatunk. A koordináta- rendszer tengelyei (a négyszög átlói) négy derékszögű háromszögre bontják a négyszöget. Ezekből a háromszögekből a hegyesszögek tangensét számoljuk ki .(1 pont) Ha* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$*, akkor* $tg\alpha_1 = \frac{3}{5}$ *(1 pont) és* $tg\alpha_2 = \frac{3}{4}$ *(1 pont), innen* $tg\alpha = tg(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{27}{11}$*. (1 pont) Ha* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$*, akkor* $tg\gamma_1 = \frac{4}{3}$ *(1 pont) és* $tg\gamma_2 = \frac{5}{3}$ *(1 pont), innen* $tg\gamma = tg(\gamma_1 + \gamma_2) = -\frac{27}{11}$*. (1 pont)*
   Ebből az következik, hogy $\alpha + \gamma = 180°$*.(1 pont)*
3. *A bizonyítás történhet úgy is, hogy felírja pl. az ABC háromszög körülírt körét (összesen 6 pont), és bizonyítja, hogy a D pont illeszkedik erre a körre.(2 pont)*

A kör egyenlete: $\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{425}{18}$.

Az oldalfelező merőleges egyenesek egyenletei:

AB felezőmerőlegese: $15x - 9y = 32$*; (1 pont)*

BC felezőmerőlegese: $6x + 8y = 7$ *(1 pont), metszéspont 2 pont, sugár 1 pont,*

CD felezőmerőlegese: $3x - 5y = 8$*,*

DA felezőmerőlegese: $24x + 18y = 35$.

8. a) első megoldás		
Jelöljük a négy fényképre írt neveket *A*, *B*, *C*, *D*-vel, a neveknek megfelelő borítékon lévő címzéseket *a*, *b*, *c*, *d*-vel.		
a1)		
Andris kapott csak megfelelő fényképet. Ez csakis úgy lehetséges, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba az *A*, *B*, *C* és *D* jelű fotók közül Peti az elsőbe helyezte *A*-t, a másodikban nem tehette *B*-t, csak *C*-t vagy *D*-t.	1 pont	
Ha az első két borítékba már elhelyezte a fotókat, a *cd* borítékokba maradó 2 fotó között pontosan az egyik borítékhoz tartozó megfelelő fénykép van még a kezében. Ezért a befejező lépése már csak egyféle lehet.	1 pont	
Tehát a kívánt elhelyezés kétféleképpen valósítható meg.	1 pont	
a2)		
A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezések mindegyikének azonos a valószínűsége.	1 pont	*Az összes (elemi) események számáért.*
(Jelölje *S* azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet.) Az *S* esemény pontosan akkor következik be, ha az első borítékba, *B*, *C* vagy *D* jelű fotó kerül. Bármelyiket is helyezte ezek közül az első borítékba, a maradék hármat – úgy, hogy senki se kapja a sajátját – háromféleképpen lehet elhelyezni, (például: *BADC*, *BCDA*, *BDAC*).	2 pont	*A kedvező esetek számáért összesen 3 pont jár.*
Hasonlóan 3-3 megfelelő elhelyezés lehetséges, ha az első helyre *C*-t vagy *D*-t teszi. Az *S* esemény tehát 9-féle elhelyezés esetén valósítható meg: $\left(p(S)=\frac{9}{24}\right)$.	1 pont	
(Jelölje *E* azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet.) Az *E* esemény pontosan akkor következik be, ha az *A*, a *B*, a *C* vagy a *D* fénykép kerül csak a megfelelő betűjelű borítékba.	1 pont	*A kedvező esetek számáért összesen 3 pont jár.*
Ezek közül bármelyik kétféleképpen lehetséges (lásd **a1** megoldását).	1 pont	
Így az *E* eseményt 8-féle elhelyezés valósítja meg: $\left(p(E)=\frac{8}{24}\right)$.	1 pont	
$\frac{9}{24}=p(S)>p(E)=\frac{8}{24}$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

8. a) második megoldás		
Jelöljük a fényképekre írt neveket *A*, *B*, *C*, *D*-vel, a neveknek megfelelő borítékon lévő címzéseket *a*, *b*, *c*, *d*-vel.		
a1)		
Andris kapott csak megfelelő fényképet. Ez csakis úgy lehetséges, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba az *ACDB* vagy *ADBC* sorrendben kerültek a fényképek.	2 pont	
Tehát a kívánt elhelyezés kétféleképpen valósítható meg.	1 pont	
a2)		
(Jelölje *S* azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet.) Az *S* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA* sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 9 kedvező eset.	3 pont	*A felsorolásban elkövethető hibák: kimarad eset, hibás esetet is hozzávesz, egy esetet többször szerepeltet. Hibánként 1-1 pontot vonjunk le.*
(Jelölje *E* azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet.) Az *E* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *ACDB, ADBC, BCAD, BDCA, CABD, CBDA, DACB, DBAC* sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 8 kedvező eset.	3 pont	*Ez az* **a1)***-beli esetek számának négyszerese. Ha csak ezt írja, ezért is jár a 3 pont.* *Lásd: előző megjegyzés.*
A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezések mindegyikének azonos a valószínűsége.	1 pont	*Az összes események egyezőségéért.*
$\frac{9}{24} = p(S) > p(E) = \frac{8}{24}$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

Az alábbi táblázatokban felsoroljuk az S és az E eseményeket megvalósító elhelyezéseket.

***S* esemény**	**A boríték címe**			
	A	**B**	**C**	**D**
1. lehetőség	b	a	d	c
2. lehetőség	b	c	d	a
3. lehetőség	b	d	a	c
4. lehetőség	c	a	d	b
5. lehetőség	c	d	a	b
6. lehetőség	c	d	b	a
7. lehetőség	d	a	b	c
8. lehetőség	d	c	a	b
9. lehetőség	d	c	b	a

***E* esemény**	**A boríték címe**			
	A	**B**	**C**	**D**
1. lehetőség	**a**	c	d	b
2. lehetőség	**a**	d	b	c
3. lehetőség	c	**b**	d	a
4. lehetőség	d	**b**	a	c
5. lehetőség	b	d	**c**	a
6. lehetőség	d	a	**c**	b
7. lehetőség	b	c	a	**d**
8. lehetőség	c	a	b	**d**

8. b) első megoldás		
Mivel minden dobás kétféle lehet, ezért a négy dobás összes lehetséges – egyenlően valószínű – sorrendje $2^4 = 16$ lehet.	1 pont	
A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek: 6+6+6+6=24, (A_{24}) 6+6+6+4=22, (A_{22}) 6+6+4+4=20, (A_{20}) 6+4+4+4=18, (A_{18}) 4+4+4+4=16. (A_{16})	1 pont	
Az (A_{24}) és az (A_{16}) esemény is egyféleképpen valósulhat meg, ezért $p(A_{24}) = p(A_{16}) = \frac{1}{16}$.	1 pont	
Az (A_{22}) és az (A_{18}) esemény is 4-féleképpen valósulhat meg, ezért $p(A_{22}) = p(A_{18}) = \frac{4}{16}$.	1 pont	
Az (A_{20}) esemény $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen valósulhat meg, ezért $p(A_{20}) = \frac{6}{16}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. b) második megoldás		
A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek: 6+6+6+6=24, (B_0) 6+6+6+4=22, (B_1) 6+6+4+4=20, (B_2) 6+4+4+4=18, (B_3) 4+4+4+4=16. (B_4)	1 pont	
Bármelyik dobásnál a 6-os és 4-es is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be.	1 pont	
Az B_k események valószínűségét a $p=\frac{1}{2};\quad n=4$ paraméterű binomiális eloszlás írja le.	1 pont	
Ezért: $p(B_0)=\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ $p(B_1)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$ $p(B_2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}$ $p(B_3)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$ $p(B_4)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.	2 pont	*Egy vagy két rossz (vagy hiányzó) érték esetén 1 pont adható.*
Összesen:	**5 pont**	

9. a)		
(A teljes beültetéshez $50 \cdot 90 = 4500$ db virágra van szükség. A különböző színű virágok darabszáma a megfelelő területek arányából számolható. Kiszámítjuk a megfelelő területeket. Jelölje az *MCD* háromszög területét *t,* az *MBA* háromszög területét *T*, az *MBC* háromszögét t_1 és az *MAD* háromszögét t_2.)	1 pont	*Ha ez a gondolat megjelenik a megoldás során, jár az 1 pont.*
Az *MBA* és a *MCD* háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik páronként egyenlő nagyságúak (*M*-nél csúcsszögek, *A* és *C*-nél, ill. *B* és *D*-nél váltószögek). A hasonlóság aránya alapján $\frac{3}{2} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$.	1 pont	
Az *MBA* háromszög területe $T = \left(\frac{3}{2}\right)^2 t$, (mert a hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzete).	1 pont	
Az *ADC* háromszög területét a *DM* szakasz $MA : MC = 3 : 2$ arányban osztja (a két háromszög *D*-csúcsból induló magassága azonos), ezért $t_1 = \frac{3}{2} t$.	1 pont	
Ugyanilyen gondolatmenettel $t_2 = \frac{3}{2} t$.	1 pont	
A trapéz területe $90 = t + 2t_1 + T = t + 3t + 2{,}25t = 6{,}25t$,	1 pont	
$t = 14{,}4$ (m^2).	1 pont	
A fehér virágok száma $14{,}4 \cdot 50 = 720$.	1 pont	
a pirosaké $3 \cdot 720 = 2160$, a sárgáké pedig 1620.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. b)		
(A teljes beültetéshez $50 \cdot 90 = 4500$ db virágra van szükség. A különböző színű virágok darabszáma a megfelelő területek arányából számolható. Kiszámítjuk a megfelelő területeket.)		*Ezért a gondolatért a teljes feladat megoldása során csak egyszer jár pont.*
Az *EFGH* négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala pl. *EF* és *HG* párhuzamosak az *AC* átlóval, és egyenlők *az AC* felével (középvonal).	1 pont	
Az *EFGH* paralelogramma területe fele az *ABCD* trapéz területének, $T_{EFGH} = 45\,\text{m}^2$,	2 pont	
mert pl. $T_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} \cdot m = HF \cdot m = 2 \cdot \left(HF \cdot \frac{m}{2}\right)$.	1 pont	
Egy paralelogrammát két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja, ezért	1 pont	
a piros és sárga virágokból egyaránt $\frac{2250}{2} = 1125$ tövet ültettek.	1 pont	
A fehér virágokkal beültetett terület a trapéz területének fele, tehát fehér virágból $45 \cdot 50 = 2250$ tövet ültettek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Összesítés	fehér	piros	sárga
tavasszal	720	2160	1620
ősszel	2250	1125	1125