ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2010. október 19.

MATEMATIKA HORVÁT NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Važne informacije

Formalni propisi:

1. Radnju treba ispraviti kemijskom olovkom čija **se boja razlikuje** od one kakvom je pisao pristupnik, pogreške, nedostatke itd. treba obilježavati sukladno školskoj praksi.
2. U prvom od dvaju sivih pravokutnika koji se nalaze pored zadatka upisan je maksimalni broj bodova za dani zadatak, **a broj bodova** koje daje profesor koji ispravlja radnje upisuje se u **pravokutnik** pored njega.
3. U slučaju **besprijekornog rješenja** dovoljno je upisati maksimalni broj bodova u odgovarajuće pravokutnike.
4. U slučaju manjkavih/netočnih rješenja vas molimo da i **parcijalne bodove** zapišete na radnju.
5. One dijelove rješenja koji su pisani grafitnom olovkom – osim crteža – profesor koji ispravlja radnje ne može vrednovati.

Pitanja u svezi sa sadržajem:

1. Kod pojedinih smo zadataka dali i bodovanje više rješenja. U koliko ste dobili rješenje koje **odstupa od danih**, potražite one dijelove rješenja koji su ekvivalentni rješenjima Upute i na osnovi toga bodujte.
2. Bodovi Upute se mogu dalje dijeliti. Međutim, bodovi koji se daju mogu biti samo cijeli.
3. Za evidentno pravilan postupak i konačan rezultat se, naravno, može dati maksimalni broj bodova i onda kada je ono **manje detaljno** od onoga u Uputi.
4. Ako rješenje sadrži **netočnost, pogrešku** u računanju, učenik ostaje bez bodova samo za onaj dio zadatka gdje je učinio pogrešku. Ako s pogrešnim parcijalnim rješenjem, ali pravilnim postupkom učenik radi dalje onda mu se moraju dati sljedeći parcijalni bodovi.
5. U slučaju pogreške u načelu, u okviru jedne misaone cjeline (one su u Uputi označene dvostrukom crtom) se ne dodjeljuju bodovi niti za formalno pravilne matematičke korake. Međutim, ako učenik s pogrešnim rezultatom koji je dobio primjenom pogrešnog načela kao polaznim podatkom pravilno računa u sljedećoj misaonoj cjelini, onda za taj dio mora dobiti maksimalni broj bodova.
6. Ako su u Uputi za ispravljane i vrednovanje **primjedbe** ili **jedinice za mjerenje** navedene u zagradama onda je i bez njih rješenje potpuno.
7. Od više pravilnih pokušaja rješenja zadatka može se **vrednovati onaj koje je pristupnik označio.**
8. Za rješenja zadataka se **ne mogu dati nagradni bodovi** (više od maksimalnog broja bodova za rješenje zadatka ili dijela zadatka).
9. Ne oduzimaju se bodovi za one pogrešne parcijalne izračune i korake koje pristupnik nije koristio pri rješavanju zadatka.
10. **Od 3 naznačena zadatka niza zadataka II.B dijela mogu se vrednovati samo rješenja 2 zadatka.** Kandidat je, pretpostavljamo, u polje kvadrata namijenjenog u tu svrhu upisao redni broj zadatka čija se ocjena neće pribrojiti sveukupnom broju bodova. Sukladno tome se eventualno rješenje naznačenog zadatka ne mora ispraviti. Ako ipak nije nedvosmisleno jasno za koji zadatak učenik traži da ne bude vrednovan, onda je automatski posljednji u nizu navedenih zadataka onaj koji ne treba vrednovati.

I.

1.		
$A \cap B = \{a;\ b;\ d\}$,	1 bod	*Bodovi se mogu dati samo za rješenja bez pogreške.*
$A \cup B = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f\}$	1 bod	
Ukupno:	**2 boda**	

2.		
Društvo ima 12 članova.	1 bod	
Napisali su ukupno 132 SMS-a.	1 bod	
Ukupno:	**2 boda**	*Priopćenje ispravnog rezultata vrijedi 2 boda.*

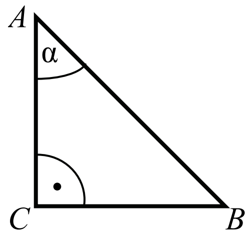
3.		
$a = -2$	1 bod	
$b = \frac{1}{2}$	2boda	
Ukupno:	**3 boda**	

4.		
Izraz se može definirati u slučaju $x > \quad 3{,}5$.	2 boda	*Ako dopusti i jednakost ili pogrešno uređuje na x, može dobiti najviše 1bod.*
Ukupno:	**2 boda**	

5.		
$a > 1$	2 boda	*Odgovor $a \geq 1$: 1 bod.*
Ukupno:	**2 boda**	

6.		
Rješenja jednadžbe su od elemenata skupa A: -1 i 0.	2 boda	*Za svaki pravilan odgovor po 1 bod. Za svaki pogrešan odgovor oduzima se 1 bod. (Naravno, broj bodova ne može biti negativan.)*
Ukupno:	**2 boda**	

7.



(Zbog definicije trigonometrijskih funkcija) $BC = \sin\alpha$,	1 bod	*$AC = \cos\alpha$ (na osnovi def.)*
$AC=BC$,	1 bod	*$\cos\alpha = \sin\alpha$*
dakle $\alpha = 45°$.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

8.

I. lažna	1 bod	
II. istinita;	1 bod	
III. istinita;	1 bod	
IV. lažna.	1 bod	
Ukupno:	**4 boda**	

9.

$b = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ ili $b = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$	2 boda	*Ako jednu jednakost koristi nepravilno, može dobiti 1 bod, a za više od jedne pogreške se ne daje bod.*
Ukupno:	**2 boda**	

10.

Pravilno zadana formula,	2 boda	*Funkcija prikazana samo grafikonom: 0 boda.*
pravilno zadano mjesto maksimuma.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

11.

Crtanje odgovarajućeg grafa.	2 boda	
Ukupno:	**2 boda**	

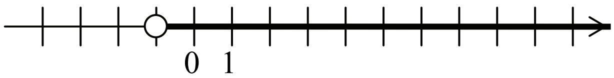
12.

Središte se nalazi na simetrali tetive,	1 bod	*Kao obrazloženje može se prihvatiti i prikaz uvjeta na crtežu.*
tako je prva koordinata 4.	1 bod	
Središte: $O(4; 4)$.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

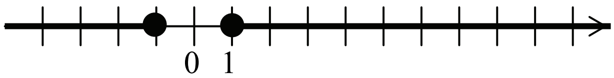
Konstatacija u=v: 1 bod;
zapisivanje jednadžbi $(1-u)^2 + (-u)^2 = r^2$ *és a* $(7-u)^2 + (-u)^2 = r^2$ *1 bod;*
zadavanje u=4 i 0 (4; 4) iz sustava jednadžbi: 1 bod.

II/A.

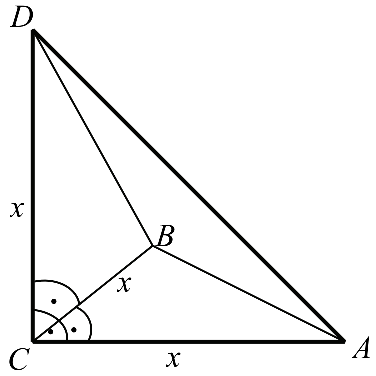
13. a)

$12x-6\cdot(x-1)>3\cdot(x-3)-4\cdot(x-2)$	1 bod	
$12x-6x+6>3x-9-4x+8$	1 bod	
$6x+6>-x-1$	1 bod	
$7x>-7$ to jest $x>-1$	1 bod	
	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

13. b)

$-3x^2\le -3$	1 bod	
$x^2\ge 1$	2 boda	*Ova se 2 boda ne mogu dijeliti.*
(Skup rješenja nejednakosti je skup onih x brojeva, koji ispunjavaju) $x\ge 1$,	1 bod	
ili $x\le -1$.	1 bod	
	2 boda	*Po 1 bod se daje samo u slučaju da su i krajnje točke ispravne.*
Ukupno:	**7 bodova**	

14. a)



2,88 dl = 288 cm^3.	1 bod	
Osnovna površina tetraedra (piramide) $T_a = \frac{x^2}{2}$ (tada je visina x),	1 bod	*Ova 2 boda se daju i onda ako zahvaljujući drugačijem premišljanju ispravno napiše zapreminu (volumen) tetraedra (piramide).*
a zapremina (volumen) $V = \frac{x^3}{6}$.	1 bod	
$288 = \frac{x^3}{6}$, od čega	1 bod	
$x^3 = 1728$; $x = 12$.	1 bod	
Svaka stranica trokuta ABD je jednaka,	1 bod	
njihova duljina je $x \cdot \sqrt{2} \approx 16{,}97 \approx 17\, cm$.	1 bod	
Bridovi tetraedra (piramide) su duljine 12 cm, odnosno i 17 cm.	1 bod	
Ukupno:	**8 bodova**	*U slučaju pogrešnog rezultata koji proistječe iz pogrešnog pretvaranja jedinice za mjerenje može se dati najviše 6 bodova.*

14. b)

Površina sukladnih pravokutnih trokuta: $T_1 = \frac{144}{2} = 72$ (cm^2).	1 bod	
Površina četvrte plohe $T_2 = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$	1 bod	
$\approx 124{,}7$ (cm^2).	1 bod	
Oplošje papirnate kutije $A = 3T_1 + T_2 = 340{,}7$ ≈ 341 cm^2.	1 bod	*Ako računa sa stranicom od 17 cm, T_2=125,1 cm^2, onda je oplošje $A \approx 341$ cm^2.*
Ukupno:	**4 boda**	

15. a) **prvo rješenje**		
(Ishod svakog dvostrukog bacanja je podjednako vjerojatan, dakle, može se primijeniti klasičan model.) Ukupno se može izvesti $6^2 = 36$ vrsta dvostrukih bacanja.	2 boda	*2 boda se daju i onda ako te ideje postaju jasne samo tijekom rješenja.*
Prvo bacanje može biti 2 vrste, a drugo 4 vrste,	1 bod	
dakle, ima $2 \cdot 4 = 8$ „dobrih“ dvostrukih bacanja,	1 bod	
tako je $\frac{8}{36}\left(=\frac{2}{9}\approx 0{,}22\right)$ vjerojatnost toga da ćemo u jednome krugu osvojiti 1 bod, koji smo dobili za prvo bacanje.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

15. a) **drugo rješenje**		
(Prvo i drugo bacanje su neovisni jedno od drugog.)		
Prvim bacanjem igrač osvaja bodove s vjerojatnošću $\frac{2}{6}$,	1 bod	
kod drugog bacanja vjerojatnošću $\frac{4}{6}$ neće dobiti bodove.	1 bod	
Tražena vjerojatnost je $\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}$	2 boda	
to jest $\frac{8}{36}=\left(\frac{2}{9}=0{,}22...\right)$.	1 bod	
Ukupno:	**5 bodova**	

15. b)		
Točno 1 bod možemo dobiti onda, ako je prvo bacanje dobro (osvojimo bod), a za drugo bacanje ne osvojimo bod, ili obratno,	2 boda	*2 boda se daju i onda ako ta ideja postaje jasna samo tijekom rješenja.*
to je ukupno $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ slučajeva.	1 bod	
2 boda možemo osvojiti u $2 \cdot 2 = 4$ slučaja.	1 bod	
Tako je vjerojatnost da ćemo osvojiti bod u jednom krugu: $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.	1 bod	*Od mogućih 36 slučajeva u 20 osvajamo,*
Vjerojatnost da nećemo osvojiti bod je $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$,	1 bod	*a u 16 ne osvajamo bod.*
dakle, veća je vjerojatnost prve mogućnosti.	1 bod	
Ukupno:	**7 bodova**	

15. a) i b) drugi način rješenja

U **prvom redu** tabele navedeni su mogući ishodi **prvoga bacanja**, a u **prvom stupcu** mogući ishodi **drugog bacanja**. U polja su upisani postignuti bodovi **kruga**. Postoji 36 jednako vjerojatnih slučajeva, može se koristiti kombinatorni model.

	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
2	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
4	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
5	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
6	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Pravilno popunjavanje tabele.	6 bodova	
pokazuje polja sukladna slučaju a): tražena vjerojatnost je: $\frac{8}{36}$.	2 boda	
b) Vjerojatnost da nećemo osvojiti bod (polja) je $\frac{16}{36}$. To je manje od $\frac{1}{2}$, stoga je veća vjerojatnost da ćemo osvojiti bod.	4 boda	
Ukupno:	**12 bodova**	

II/B.

16. a)		
$a_8 = a_1 + 7d$, gdje je d diferencija niza. $14 = -7 + 7d$	1 bod	
$d = 3$.	1 bod	
$660 \geq S_n$	1 bod	*Ako ne napiše nejednakost (odnosno, ne računa s njom), već obrazloži da je rješenje zadatka pozitivni cijeli brojevi ne veći od 24, onda dobiva 7 bodova.*
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{-14 + 3 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$	1 bod	
$3n^2 - 17n - 1320 \leq 0$.	1 bod	
Kvadratna funkcija koja se može priključiti lijevoj strani nejednakosti ima minimum (a=3>0, ili pozivanje na grafikon itd.)	1 bod	
njene nultočke: 24 i $-\frac{55}{3}$ (što je negativno).	1 bod	
$\left(-\frac{55}{3} < 0 <\right) n \leq 24$	1 bod	
Budući da je u našem zadatku n pozitivni cijeli, moguće vrijednosti n-a:1, 2, …, 23, 24.	1 bod	
Ukupno:	**9 bodova**	
I pravilan odgovor dobiven na osnovi analize S_1, S_2, …, S_{24}, S_{25} je važeći. Ako analiza ili pozivanje na monotonost izostanu, dobiva 7 bodova. *Ako radi samo s jednakosti i kao rezultat zadaje n=24, dobiva 4 boda.*		

16. b)		
$a_4 = a_1 \cdot q^3$, gdje je q količnik niza. $-189 = -7 \cdot q^3$	1 bod	
$q = 3$.	1 bod	
$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$	1 bod	
$-68887 = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$	1 bod	
$3^n = 19\,683$	2 boda	
Eksponencijalna funkcija je uzajamno jednosmislena (strogo monotona),	1 bod	*Mogu se prihvatiti i druga pravilna obrazloženja.*
$n = 9$.	1 bod	
Ukupno:	**8 bodova**	

17. a)		
Površina pravilnog trokuta sa stranicom a $t_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 2{,}7\ (\text{cm}^2)$.	1 bod	
Područje iznad pravilnog trokuta je kružni isječak koji pripada 60°-om središnjem kutu jedne kružnice čiji je radijus/polumjer a,	1 bod	
amelynek területe: $t_2 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}6\ (\text{cm}^2)$.	1 bod	
Površinu najgornjeg „malog mjeseca“ ćemo dobiti tako, ako od površine polukružnice radijusa/polumjera $\frac{a}{2}$ oduzmemo površinu kružnog isječka.	1 bod	*1 bod se daje i onda ako ta ideja postaje jasna samo tijekom rješenja.*
$t_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - t_2 = \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = .$	1 bod	
$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1{,}9\ (\text{cm}^2)$.	1 bod	
Ukupno:	**6 bodova**	

17. b) prvo rješenje		
Ako uzmemo u obzir samo uvjet (1), onda broj boja kojima bi „mali mjesec“ mogao biti obojen je četiri,	1 bod	
zbog boje kružnog isječka (1) samo tri boje,	1 bod	
broj boja pravilnog trokuta bi mogao biti isto tri, jer njegova boja ne može biti ista samo s bojom kružnog isječka.	1 bod	
Broj bojanja koja udovoljavaju uvjetu (1) je, dakle, $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.	1 bod	
Od ta 36 slučaja moramo oduzeti one slučajeve za koje se ne ispunjavaju uvjeti (2).	1 bod	
Broj onih mogućnosti kada bojimo s 3 boje i kada je se crveno područje nalazi pored žutog je $4 \cdot 2 = 8$,	2 boda	
naime, crveno i žuto područje može biti smješteno jedno pored drugog na četiri načina, a broj treće boje u svakom slučaju može biti 2.	1 bod	
Mogu biti samo dvije vrste takvih bojanja u kojima se koriste crvena i žuta boja.	2 boda	
Tako je broj bojanja koja udovoljavaju obama uvjetima: $36 - (8 + 2) = 26$.	1 bod	
Ukupno:	**11 bodova**	

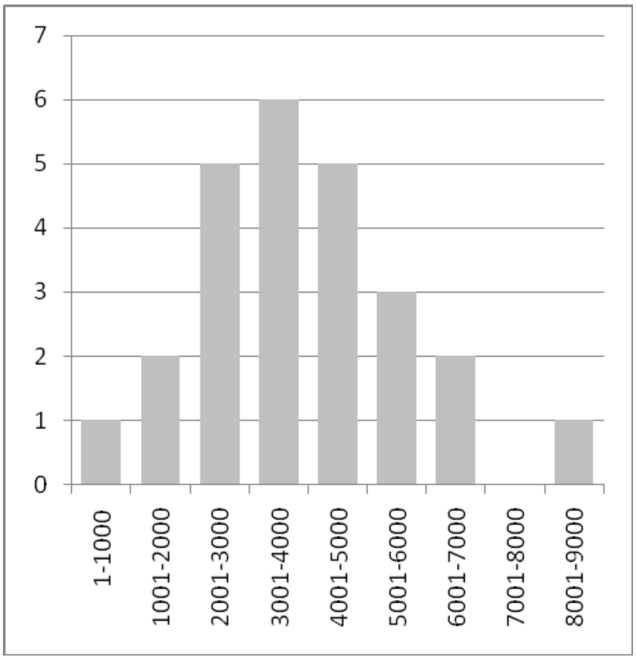
17. b) drugo rješenje		
Ako za bojanje upotrijebimo i crvenu i žutu boju, onda se te boje zbog uvjeta (2) mogu koristiti samo za bojanje „malog mjeseca“ i pravilnog trokuta,	1 bod	*Za pravilan odgovor bez obrazloženja daje se 1 bod.*
a kružni isječak može biti zelen ili plav. Tada ima $2 \cdot 2 = 4$ mogućnosti.	1 bod	
Ako za bojanje ne koristimo crvenu boju, onda postoje dvije mogućnosti: 1. Koristimo svaku od preostale tri boje. Tada je broj mogućnosti: $3! = 6$.	1 bod	
2. Od preostale tri boje koristimo samo dvije. Ove dvije boje možemo izabrati na tri načina,	1 bod	
te zbog uvjeta (1) s izabrane dvije boje možemo napraviti dvije vrste značaka.	1 bod	*Za pravilan odgovor bez obrazloženja daje se 1 bod.*
Tako je u tom slučaju broj mogućnosti: $3 \cdot 2 = 6$.	1 bod	
Dakle, broj onih bojanja u kojima nema crvene boje je: $6 + 6 = 12$.	1 bod	*Ako pristupnik ne uzme u obzir slučajeve koji su zbrojeni dva puta, onda od ova 4 boda dobije samo 3.*
Broj onih bojanja u kojima se ne koristi žuta boja je isto 12.	1 bod	
Među njima ima dva takva bojanja tijekom kojih se ne koristi niti crvena niti žuta boja.	1 bod	
Ta smo 2 slučaja već malo prije uvažili, tako je broj bojanja tijekom kojih se ne koristi žuta boja već različita od prebrojenih i iznosi 10	1 bod	
Ukupni broj varijanti bojanja koja udovoljavaju uvjetima: $4 + 12 + 10 = 26$.	1 bod	
Ukupno:	**11 bodova**	

17. b) **treće rješenje**		
Ako uzmemo u obzir samo uvjet (1) onda se točno s tri boje od četiri može izvesti $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina bojanja.	2 boda	
Koristivši točno dvije boje od četiri i uzevši u obzir samo uvjet (1) broj mogućih bojanja iznosi: $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$.	2 boda	
Od ukupno 36 slučaja moramo oduzeti one slučajeve za koje se ne ispunjava uvjet (2).	1 bod	
Broj onih mogućnosti kada bojimo s tri boje i crveno se područje nalazi pored žutog je $4 \cdot 2 = 8$,	2 boda	
naime, na četiri načina mogu biti smještena crvena i žuta područja jedno pored drugoga, a treća boja u svakom slučaju može biti dvije vrste.	1 bod	
Takvih bojanja tijekom kojih se koriste samo crvena i žuta boja, mogu biti dvije vrste.	2 boda	
Tako je broj onih bojanja koja udovoljavaju obama uvjetima: $36 - (8 + 2) = 26$.	1 bod	
Ukupno:	**11 bodova**	

Primjedbe: Ako rješenje traži navođenjem konkretnih slučajeva:

- *sistematizirano navođenje svih slučajeva: 11 bodova*
- *ako pristupnik na neki način, ali nedvosmisleno napiše svih 26 mogućnosti bojanja, ali iz toga se ne može iščitati da ne postoje daljnje mogućnosti, može dobiti najviše 9 bodova;*
- *ako neki uvjet zanemari: najviše 3 boda*
- *navede samo ispravne slučajeve, ali ne sve mogućnosti : najviše 5 bodova.*

18. a)		
U uzorku od 25 elemenata je zbroj elemenata 101 400.	1 bod	
Tako je prosjek $\frac{101\,400}{25}=$	1 bod	
$=4056(\text{ft.})$.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	

18. b)		
Tabela učestalosti podataka svrstanih u razrede od 1000 ft.: (tablica ispod)	3 boda	*U slučaju jednog ili dva pogrešna podatka daju se 2 boda,* *u slučaju 3-4 pogrešna podatka daje se 1 bod,* *u slučaju više od 4 pogreške se ne daju bodovi.*
	2 boda	*I pravilan dijagram koji je napravljen zamjenom osi je potpuno ispravan.* *Za dobar dijagram koji je napravljen korištenjem pogrešnih podataka iz niza podataka (osi su dobre i na njima su dobre jedinice) se daju 2 boda.*
Ukupno:	**5 bodova**	

Mjesečni troškovi u ft.	Broj obitelji
1-1000	1
1001-2000	2
2001-3000	5
3001-4000	6
4001-5000	5
5001-6000	3
6001-7000	2
7001-8000	0
8001-9000	1

18. c)		
Izostavljanjem dvaju krajnjih rezultata, novi je prosjek: $\frac{91\,900}{23} \approx$	1 bod	
$\approx 3996(\text{ft.})$.	1 bod	
Budući da je $\frac{3996}{4056} \approx 0{,}9852$,	1 bod	
stoga je prosjek smanjen za $\approx 1{,}48\,\%$.	1 bod	*Može se prihvatiti i 1,49%.*
Najmanji element novoga niza podataka je 1200 ft., a najveći element 6800 ft.,	1 bod	
tako je njegov obim 5600 ft.	1 bod	
Ukupno:	**6 bodova**	

18. d)		
Novi prosjek $\frac{25 \cdot 4056 + (4056 - 1000) + (4056 + 1000)}{27} =$	2 boda	*Pravilan brojnik: 1bod, pravilan nazivnik: 1 bod.*
$= \frac{27 \cdot 4056}{27} = 4056$.	1 bod	
Ukupno:	**3 boda**	