

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2010. október 19.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**NEMZETI ERŐFORRÁS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

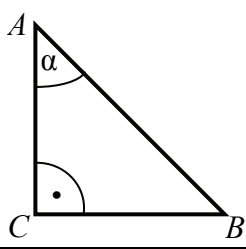
1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részsámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II.B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$A \cap B = \{a; b; d\},$	1 pont	<i>Csak hibátlan válaszokért adható pont.</i>
$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$	1 pont	
Összesen:	2 pont	
2.		
A társaság 12 tagú.	1 pont	
132 SMS-t írtak összesen.	1 pont	
Összesen:	2 pont	<i>Helyes végeredmény közlése 2 pontot ér.</i>
3.		
$a = -2$	1 pont	
$b = \frac{1}{2}$	2 pont	
Összesen:	3 pont	
4.		
A kifejezés $x > -3,5$ esetén értelmezhető.	2 pont	<i>Ha egyenlőséget is megenged, vagy rosszul rendez x-re, legfeljebb 1 pont adható.</i>
Összesen:	2 pont	
5.		
$a > 1$	2 pont	<i>Az $a \geq 1$ válasz 1 pont.</i>
Összesen:	2 pont	
6.		
Az egyenlet megoldásai az A halmaz elemei közül: -1 és 0 .	2 pont	<i>Helyes válaszonként 1-1 pont. Minden hibás válasszal 1 pontot veszít. (Természetesen nem lehet negatív a pontszám.)</i>
Összesen:	2 pont	

7.		
		
(A szögfüggvények definíciója miatt) $BC = \sin \alpha$,	1 pont	$AC = \cos \alpha$ (def. alapján)
$AC = BC$,	1 pont	$\cos \alpha = \sin \alpha$
tehát $\alpha = 45^\circ$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8.		
I. hamis;	1 pont	
II. igaz;	1 pont	
III. igaz;	1 pont	
IV. hamis.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

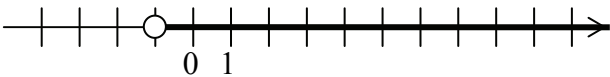
9.		
$b = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ vagy $b = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$	2 pont	<i>Ha egy azonosságot hibásan használ, 1 pontot kaphat, egynél több hiba esetén nem jár pont.</i>
Összesen:	2 pont	

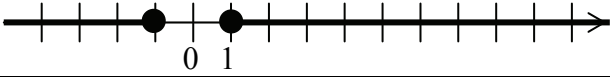
10.		
Jól megadott képlet,	2 pont	<i>A csak grafikonnal ábrázolt függvény 0 pont.</i>
a maximumhely jó megadása.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

11.		
Egy megfelelő gráf megrajzolása.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

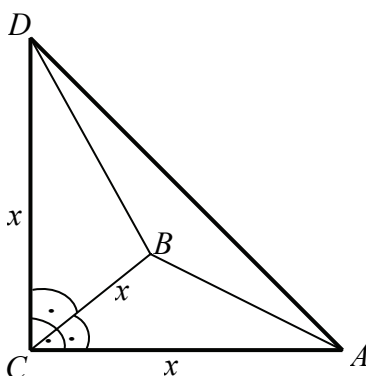
12.		
A középpont a húr felező merőlegesén van,	1 pont	<i>A feltételek ábrán való jó megjelenítése is elfogadható indoklás.</i>
így az első koordinátája 4.	1 pont	
A középpont: $O(4; 4)$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	
<i>Az $u = v$ megállapítása: 1 pont; az $(1-u)^2 + (-u)^2 = r^2$ és a $(7-u)^2 + (-u)^2 = r^2$ egyenletek felírása 1 pont; az egyenletrendszerből az $u=4$ és az $O(4; 4)$ megadása 1 pont.</i>		

II/A.

13. a)		
$12x - 6 \cdot (x - 1) > 3 \cdot (x - 3) - 4 \cdot (x - 2)$	1 pont	
$12x - 6x + 6 > 3x - 9 - 4x + 8$	1 pont	
$6x + 6 > -x - 1$	1 pont	
$7x > -7$ azaz $x > -1$	1 pont	
	1 pont	
Összesen:	5 pont	

13. b)		
$-3x^2 \leq -3$	1 pont	
$x^2 \geq 1$	2 pont	<i>Ez a 2 pont nem bontható.</i>
(Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza azoknak az x számoknak a halmaza, amelyekre teljesül) $x \geq 1$,	1 pont	
vagy $x \leq -1$.	1 pont	
	2 pont	<i>Csak akkor jár az 1-1 pont, ha a megoldásban a végpontok is jók.</i>
Összesen:	7 pont	

14. a)



2,88 dl = 288 cm ³ .	1 pont	
A tetraéder (gúla) alapterülete $T_a = \frac{x^2}{2}$ (ekkor a magassága x),	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha más megfontolással helyesen írja fel a gúla térfogatát.</i>
a térfogata $V = \frac{x^3}{6}$.	1 pont	
$288 = \frac{x^3}{6}$, melyből	1 pont	
$x^3 = 1728$; $x = 12$.	1 pont	
Az ABD háromszög mindegyik oldala egyenlő,	1 pont	
hosszuk $x \cdot \sqrt{2} \approx 16,97 \approx 17$ cm.	1 pont	
A tetraéder (gúla) élei 12 cm, illetve 17 cm hosszúak.	1 pont	
Összesen:	8 pont	<i>A mértékegység rossz átváltásából származó hibás eredmény esetén maximum 6 pont adható.</i>

14. b)

Az egybevágó derékszögű háromszögek területe: $T_1 = \frac{144}{2} = 72$ (cm ²).	1 pont	
A negyedik lap területe $T_2 = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$	1 pont	
$\approx 124,7$ (cm ²).	1 pont	
A papírdoboz felszíne $A = 3T_1 + T_2 = 340,7$ ≈ 341 cm ² .	1 pont	<i>Ha a 17 cm-es oldallal számol, $T_2 = 125,1$ cm², a felszín $A \approx 341$ cm².</i>
Összesen:	4 pont	

15. a) első megoldás		
(A kettős dobások minden kimenetele egyenlően valószínű, tehát alkalmazható a klasszikus modell.) Összesen $6^2 = 36$ -féle kettős dobás történhet.	2 pont	<i>Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is jár a 2 pont.</i>
Az első dobás 2-féle, a második 4-féle lehet,	1 pont	
tehát $2 \cdot 4 = 8$ „jó” kettős dobás van,	1 pont	
így $\frac{8}{36} \left(= \frac{2}{9} \approx 0,22 \right)$ annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kaptuk.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. a) második megoldás		
(Az első és második dobás függetlenek.)		
Az első dobással $\frac{2}{6}$ valószínűséggel szerez pontot a játékos,	1 pont	
a másodiknál $\frac{4}{6}$ valószínűséggel nem kap pontot.	1 pont	
A keresett valószínűség $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}$	2 pont	
azaz $\frac{8}{36} = \left(\frac{2}{9} = 0,22\dots \right)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. b)		
Pontosan 1 pontot akkor szerezhethetünk, ha az első dobás jó (pontot érő), a második nem pontot érő, vagy fordítva,	2 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont.</i>
ez összesen $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ eset.	1 pont	
2 pontot szerezhethetünk $2 \cdot 2 = 4$ esetben.	1 pont	
Így annak a valószínűsége, hogy egy menetben szerzünk pontot: $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.	1 pont	<i>A lehetséges 36 esetből 20 esetben szerzünk pontot,</i>
Annak, hogy nem szerzünk pontot, $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ a valószínűsége,	1 pont	<i>16 esetben nem szerzünk pontot.</i>
tehát az első eseménynek nagyobb a valószínűsége.	1 pont	
Összesen:	7 pont	


15. a) és b) másik megoldási módszer

A táblázat **első sora az első dobás, első oszlopa a második dobás** lehetséges kimeneteleit mutatja. A mezőkbe a **menet** során elért pontszámok kerültek. 36 egyenlően valószínű eset van, használható a kombinatorikus modell.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1	0
4	1	1	1	2	2	1
5	1	1	1	2	2	1
6	0	0	0	1	1	0


A táblázat helyes kitöltése.

6 pont

 az a) eseménynek megfelelő mezőket mutatja:

$\frac{8}{36}$ a keresett valószínűség.

2 pont

b) Nem szerzünk pontot ( mezők)

valószínűsége $\frac{16}{36}$.

Ez kisebb mint $\frac{1}{2}$, ezért annak nagyobb a valószínűsége, hogy szerzünk pontot.

4 pont

Összesen: 12 pont

II/B.

16. a)		
$a_8 = a_1 + 7d$, ahol d a sorozat differenciája. $14 = -7 + 7d$	1 pont	
$d = 3$.	1 pont	
$660 \geq S_n$	1 pont	Ha nem egyenlőtlenséget ír föl (illetve nem azzal számol), de indokolja, hogy a 24-nél nem nagyobb pozitív egész számok a feladat megoldásai, akkor megkapja a 7 pontot.
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{-14 + 3 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$	1 pont	
$3n^2 - 17n - 1320 \leq 0$.	1 pont	
Az egyenlőtlenség bal oldalához kapcsolható másodfokú függvénynek minimuma van ($a=3>0$, vagy grafikonra hivatkozás stb.),	1 pont	
zérushelyei: 24 és $-\frac{55}{3}$ (ami negatív).	1 pont	
$\left(-\frac{55}{3} < 0 < \right)n \leq 24$	1 pont	
Mivel a feladatunkban n pozitív egész, n lehetséges értékei: 1, 2, ..., 23, 24.	1 pont	
Összesen:	9 pont	
<i>Az $S_1, S_2, \dots, S_{24}, S_{25}$ megvizsgálása alapján kapott helyes válasz is teljes értékű. Ha S_{25} vizsgálata, vagy a monotonításra való hivatkozás elmarad, 7 pontot kap. Ha csak egyenlőséggel dolgozik és $n=24$-et ad megoldásnak, 4 pontot kap.</i>		

16. b)		
$a_4 = a_1 \cdot q^3$, ahol q a sorozat hányadosa. $-189 = -7 \cdot q^3$	1 pont	
$q = 3$.	1 pont	
$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$	1 pont	
$-68887 = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$	1 pont	
$3^n = 19\,683$	2 pont	
Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton),	1 pont	Egyéb helyes indoklás is elfogadható.
$n = 9$.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

17. a)		
Az a oldalú szabályos háromszög területe: $t_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 2,7 \text{ (cm}^2\text{)}.$	1 pont	
A szabályos háromszög feletti tartomány egy a sugarú kör 60° -os középponti szögéhez tartozó körszelet,	1 pont	
amelynek területe: $t_2 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$	1 pont	
A legfelső „holdacska” területét úgy kapjuk, hogy az $\frac{a}{2}$ sugarú félkör területéből kivonjuk a körszelet területét.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár az 1 pont.</i>
$t_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - t_2 = \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$	1 pont	
$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1,9 \text{ (cm}^2\text{)}.$	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. b) első megoldás		
Ha csak az (1) feltételt vesszük figyelembe, akkor a „holdacska” színe négyféle lehet,	1 pont	
a körszelet színe (1) miatt már csak háromféle,	1 pont	
a szabályos háromszög színe pedig szintén háromféle, hiszen csak a körszelet színével nem lehet azonos.	1 pont	
Az (1) feltételnek megfelelő színezések száma tehát $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.	1 pont	
Ebből a 36 esetből kell elvennünk azokat az eseteket, amelyekre (2) nem teljesül.	1 pont	
Azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor 3 színnel színezzük, és piros tartomány van sárga mellett $4 \cdot 2 = 8$,	2 pont	
ugyanis négyféleképpen helyezkedhet el egymás mellett a piros és a sárga tartomány, és a harmadik szín mindegyik esetben kétféle lehet.	1 pont	
Olyan kifutás, ahol csak a piros és sárga színeket használnánk, kétféle lehet.	2 pont	
Így a mindkét feltételnek megfelelő színezések száma: $36 - (8 + 2) = 26$.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

17. b) második megoldás		
Ha a piros és a sárga színt is felhasználjuk a kifestéshez, akkor ezek a színek csak a „holdacska” és a szabályos háromszög festésére alkalmazhatók (2) miatt,	1 pont	<i>Indoklás nélküli jó válaszáért 1 pont jár.</i>
a körselet pedig lehet zöld vagy kék. Ekkor $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség van.	1 pont	
Ha a piros színt nem használjuk a kifestéshez, akkor két eset van: 1. A fennmaradó három szín mindegyikét használjuk. Ekkor a lehetőségek száma: $3! = 6$.	1 pont	
2. A maradék három színből csak kettőt használunk. Ezt a két színt háromféleképpen tudjuk kiválasztani, és (1) miatt a kiválasztott két szín felhasználásával kétféle kitűző készíthető.	1 pont	
Így ebben az esetben a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 = 6$.	1 pont	<i>Indoklás nélküli jó válaszáért 1 pont jár.</i>
Az olyan kifestések száma tehát, amelyekben a piros szín nem szerepel: $6 + 6 = 12$.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe a kétszer számolt eseteket, akkor ebből a 4 pontból csak 3 pontot kapjon.</i>
A sárga színt nem használó kifestési lehetőségek száma is 12.	1 pont	
Ezek között két olyan kifestés van, amelyben sem a piros, sem a sárga színt nem használjuk.	1 pont	
Ezt a 2 esetet már az előzőekben beszámítottuk, így a már összeszámoltaktól különböző, a sárga színt nem használó kifestések száma 10.	1 pont	
A feltételeknek megfelelő összes kifestési lehetőségek száma: $4 + 12 + 10 = 26$.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

17. b) harmadik megoldás		
Ha csak az (1) feltételt vesszük figyelembe, akkor a négy színből pontosan három szín felhasználásával $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ kifestés lehetséges.	2 pont	
A négy színből pontosan két szín felhasználásával és csak az (1) feltétel figyelembe vételével a lehetséges kifestések száma: $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$.	2 pont	
Az összesen 36 esetből kell elvonnunk azokat az eseteket, amelyekre (2) nem teljesül.	1 pont	
Azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor 3 színnel színezzük, és piros tartomány van sárga mellett $4 \cdot 2 = 8$,	2 pont	
ugyanis négyféleképpen helyezkedhet el egymás mellett a piros és a sárga tartomány, és a harmadik szín mindegyik esetben kétféle lehet.	1 pont	
Olyan kifestés, ahol csak a piros és sárga színeket használnánk, kétféle lehet.	2 pont	
Így a mindkét feltételnek megfelelő színezések száma: $36 - (8 + 2) = 26$.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

Megjegyzés: Ha a megoldást konkrét esetek felsorolásával keresi:

- az összes eset rendszerezett felsorolása 11 pont;
- ha a vizsgázó valamilyen módon megadja mind a 26 lehetséges színezést, de nem olvasható ki belőle, hogy további lehetőségek nincsenek, legfeljebb 9 pontot kaphat;
- ha elhagyja valamelyik feltételt, legfeljebb 3 pont;
- csupa jó esetet sorol fel, de nem az összes lehetőséget, legfeljebb 5 pont adható.

18. a)		
A 25 elemű mintában az elemek összege 101 400.	1 pont	
Így az átlag $\frac{101\,400}{25} =$	1 pont	
= 4056(Ft).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

18. b)																						
Az 1000 Ft-os osztályokba sorolt adatok gyakorisági táblázata:																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Havi költség Ft-ban</th> <th>Családok száma</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1-1000</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1001-2000</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2001-3000</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>3001-4000</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>4001-5000</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>5001-6000</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>6001-7000</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>7001-8000</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>8001-9000</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		Havi költség Ft-ban	Családok száma	1-1000	1	1001-2000	2	2001-3000	5	3001-4000	6	4001-5000	5	5001-6000	3	6001-7000	2	7001-8000	0	8001-9000	1	3 pont
Havi költség Ft-ban	Családok száma																					
1-1000	1																					
1001-2000	2																					
2001-3000	5																					
3001-4000	6																					
4001-5000	5																					
5001-6000	3																					
6001-7000	2																					
7001-8000	0																					
8001-9000	1																					
		2 pont																				
Összesen:		5 pont																				

*1 vagy 2 hibás adat esetén 2 pont jár,
3-4 hibás adatért 1 pont jár,
4-nél több hiba esetén nem jár pont.*

*A tengelyek felcserélésével készített helyes diagram is teljes értékű.
Hibás adatokat is tartalmazó adatsorból készített jó diagramért (jók a tengelyek, azokon jók az egységek) jár a 2 pont.*

18. c)		
A két szélső adat elhagyásával az új átlag: $\frac{91\,900}{23} \approx$	1 pont	
≈ 3996 (Ft).	1 pont	
Mivel $\frac{3996}{4056} \approx 0,9852$,	1 pont	
ezért az átlag $\approx 1,48\%$ -kal csökkent.	1 pont	<i>1,49% is elfogadható.</i>
Az új adatsor legkisebb eleme 1200 Ft, legnagyobb eleme 6800 Ft,	1 pont	
így terjedelme 5600 Ft.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. d)		
Az új átlag $\frac{25 \cdot 4056 + (4056 - 1000) + (4056 + 1000)}{27} =$	2 pont	<i>Helyes számláló 1 pont, helyes nevező 1 pont.</i>
$= \frac{27 \cdot 4056}{27} = 4056.$	1 pont	
Összesen:	3 pont	