ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2010. október 19.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

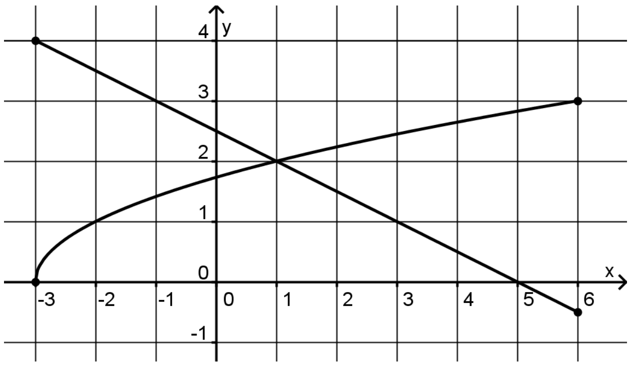
1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)

Elvégezve a köbreemeléseket kapjuk, hogy: $\left(x^3-3x^2+3x-1\right)-\left(x^3+3x^2+3x+1\right)>-8$	2 pont	
összevonva és rendezve: $x^2<1$	1 pont	
a megoldáshalmaz tehát a $\left]-1\,;1\right[$ intervallum.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)



Az f függvény helyes ábrázolása	2 pont	
A g függvény helyes ábrázolása	1 pont	
A metszéspont koordinátái: $(1\,;2)$	1 pont	*A pont csak akkor jár, ha számolással igazol!*
Összesen:	**4 pont**	

1. c) első megoldás

A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3}\le -0{,}5x+2{,}5$ egyenlőtlenséggel.	1 pont	
A bal oldalon szereplő kifejezés nem-negatív,	1 pont	
a jobb oldalon szereplő kifejezés 5-nél nagyobb x értékekre negatív.	1 pont	
Az egyenlőtlenség megoldását a $[-3\,;6]$ intervallumon b) feladatban ábrázolt f és g függvények grafikonjáról leolvashatjuk.	1 pont	
A megoldáshalmaz a $[-3\,;1]$ intervallum.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. c) második megoldás		
A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3} \le -0{,}5x + 2{,}5$ egyenlőtlenséggel, ahol $x \ge -3$.	1 pont	
A $[5\ ;\ \infty\ [$ halmaz elemei nem adhatnak megoldást, hiszen ekkor a bal oldal pozitív, a jobb oldal pedig negatív vagy 0.	1 pont	
Ha $x \in [-3;5\ [$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalán nem negatív szám áll, ezen a halmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:	1 pont	
$x+3 \le 0{,}25x^2 - 2{,}5x + 6{,}25$.	1 pont	
$0 \le x^2 - 14x + 13$. Ennek megoldáshalmaza **R**-en: $[-\infty;1] \cup [13\ ;\infty[$.	1 pont	
Tehát a $[-3;5[$ halmazon a megoldáshalmaz a $[-3\ ;1\ ]$ intervallum.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a)		
A legnagyobb helyi értékű számjegy csak a 8 lehet.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár az 1 pont.*
A többi 9 helyi érték mindegyikénél két lehetőségünk van: a 0 vagy a 8 számjegy.	1 pont	
Így 2^9 féle (512 féle) tízjegyű szám képezhető.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. b)		
Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha osztható 9-cel és 5-tel.	2 pont	
Mivel a keresett szám 5-tel osztható, ezért csak 0-ra végződhet.	1 pont	
Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.	1 pont	
Csak a 0 és a 8 számjegyeket tartalmazó egész szám esetén ehhez legalább 9 darab 8-as számjegy kell.	1 pont	
A legkisebb (pozitív) többszöröshöz pontosan 9 darab 8-as számjegyre van szükség,	1 pont	
tehát a keresett szám: 8 888 888 880.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a)		
Az alaplap területe: $T_{ABCD} = 12 \cdot 6 = 72$ cm².	1 pont	
Az *AB* él felezőpontja legyen *M*, a *CD* él felezőpontja pedig *N*. Az *APB* háromszög egyenlő szárú háromszög, a *PM* merőleges az *AB* szakaszra. Az *MNP* háromszög az *N* csúcsban derékszögű, mert pl. a *PN* szakasz merőleges az *ABCD* síkra, így annak minden egyenesére.	1 pont	*Ha mindez kevésbé részletesen van indokolva, vagy csak a megoldás menetéből derül ki, az 1 pont jár.*
PM = 10 (cm) (a befogók 6 és 8).	1 pont	
Az *ABP* háromszög területe: $T_{ABP} = \frac{AB \cdot PM}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60$ (cm²).	1 pont	
A *DCP* háromszög egyenlő szárú háromszög, $T_{DCP} = \frac{DC \cdot PN}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$ (cm²).	1 pont	
DP=*PC*=10 (cm) (pl. a *PCG* derékszögű háromszögből, amelyben a befogók 8 és 6).	1 pont	
A *PBC* és a *PAD* oldallapok egybevágó háromszögek (oldalaik páronként egyenlők),	1 pont	*Ezek a pontok így is megkaphatók: A BC él merőleges a CDHG síkra, ezért annak minden egyenesére is. 1 pont. A BCP háromszög tehát derékszögű (a C csúcsánál) 1 pont.*
és (pl.) a két háromszög egybevágó a *PBM* (az *M* csúcsnál) derékszögű háromszöggel a megfelelő oldalak egyenlősége miatt.	1 pont	
$T_{PBC} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30$ (cm²).	1 pont	
A gúla felszíne: $(72 + 60 + 48 + 2 \cdot 30 =)$ 240 cm².	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

3. b) **első megoldás**		
Az *ABP* lap síkja a téglatest *ABGH* átlós síkmetszetének síkja,	1 pont	
tehát a két sík hajlásszöge a *HAD* ∢-gel egyenlő:	1 pont	
$\mathrm{tg}\, HAD\sphericalangle = \frac{HD}{AD} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. ahonnan $HAD\sphericalangle \approx 53{,}1°$	1 pont	*Bármilyen helyes közelítő érték elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

3. b) **második megoldás**		
Az MN szakasz és a PM szakasz is merőleges az AB élre, ezért a kérdezett szög a $PMN\sphericalangle$.	1 pont	
A PMN háromszög N-nél derékszögű,	1 pont	
ezért $\operatorname{tg} PMN\sphericalangle = \frac{PN}{MN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, ahonnan $PMN\sphericalangle \approx 53{,}1°$.	1 pont	*Bármilyen helyes közelítő érték elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

4. a)		
A fiúk számát az oszlopokban lévő adatok alapján számoljuk ki:	1 pont	*Ha ez a gondolat a számolásból derül ki, ez a pont akkor is jár.*
$(103 + 58 + 15 + 3 + 3 + 0) + 2\cdot(61 + 11 + 3 + 3\cdot1) +$ $+ 3\cdot16 + 4\cdot9 + 5\cdot4 =$	1 pont	
$= 442$ fiú van összesen a megkérdezett családokban.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

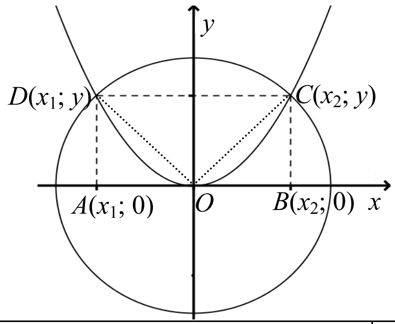
4. b)		
A lányok számát a táblázatból soronként számolhatjuk ki, de a gyermektelen és az egygyermekes családok adatait (160, illetve a 103 és a 121) nem vesszük figyelembe. Nincs lány 61+8+5=74 családban.	1 pont	
1 lány van 58+11+4+1+1=75 családban.	1 pont	
2 lány van 54+15+3+2+2+2=78 családban.	1 pont	
3 lány van 9+3+1+1+1=14 családban. 4 lány van 6+3+1+1+1=12 családban. 5 lány van 1+1= 2 családban.	1 pont	*Ez a pont jár akkor is, ha csak megállapítja, hogy 78-nál nagyobb összeget már nem kaphat a táblázatból, de nem számolja ki az összegeket.*
A legalább kétgyermekes családokban leggyakoribb leányszám tehát 2.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. c)

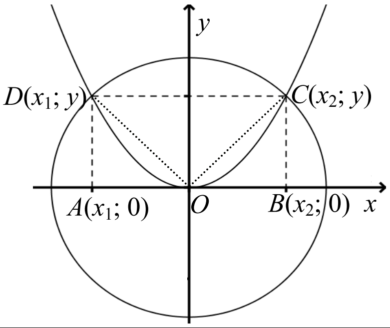
gyermekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	21	8	5	4	2	0	0

A gyakoriság helyes értelmezése.	1 pont	*Ha a dolgozatból kiderül, ez a pont jár.*
A táblázatban van legalább 4 helyes gyakoriság.	1 pont	
Minden gyakoriság helyes.	1 pont	
A támogatott családok száma: 40.	1 pont	*Ha rossz gyakorisági adatokkal elvileg helyesen és pontosan számolt, akkor is kapja meg ezeket a pontokat.*
A támogatott gyermekek száma: $21\cdot4+8\cdot5+5\cdot6+4\cdot7+2\cdot8=$	1 pont	
$= 198.$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II.

5. első megoldás		
		
Az $x^2+y^2=8$ egyenletű kör középpontja és a parabola tengelypontja is az origó (*O*).	2 pont	*Ez a 2 pont a megfelelő ábra elkészítése esetén is jár.*
A metszéspontjaik meghatározása: $\left.\begin{array}{l}2y=x^2\\ x^2+y^2=8\end{array}\right\}$ $y^2+2y-8=0$ $y_1=2 \quad y_2=-4$,	2 pont	
amelyek közül az $y=2$ a feladatnak megfelelő.	1 pont	
A metszéspontok abszcisszái: $x_1=-2 \quad x_2=2$.	1 pont	
A *CD* húr a körlapból egy olyan körszeletet vág le, amelynek középponti szöge $\frac{\pi}{2}$ radián (=90°), mert	1 pont	
az *OD* és *OC* is egy-egy négyzet átlója,	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során látszik, jár az 1 pont.*
így a területe: $T_{körszelet}=\frac{1}{2}r^2(\hat{\alpha}-\sin\alpha)=$ $=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\pi-4$.	2 pont	$2\pi-4\approx 2{,}283$
A parabolából a *CD* húr által levágott parabolaszelet területe: $T_{parabolaszelet}=T_{ABCD}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{2}dx=4\cdot 2-\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}dx=$ $=8-\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2}=8-\left[\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]=\frac{16}{3}$	5 pont	*Pontbontás a helyes egyenlőségek alapján lehetséges.*
A konvex rész területe: $T=T_{körszelet}+T_{parabolaszelet}=2\pi-4+\frac{16}{3}=2\pi+\frac{4}{3}$ területegység.	1 pont	$2\pi+\frac{4}{3}\approx 7{,}62$
Összesen:	**16 pont**	
Ha a számítás során π közelítő értékét használja,2 pontot veszítsen.		

5. második megoldás



Az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör középpontja és a parabola tengelypontja is az origó (O).	2 pont	*Ez a 2 pont a megfelelő ábra elkészítése esetén is jár.*
A metszéspontjaik meghatározása: $\left.\begin{array}{l} 2y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right\}$ $y^2 + 2y - 8 = 0$ $y_1 = 2 \quad y_2 = -4$,	2 pont	
amelyek közül az $y = 2$ a feladatnak megfelelő.	1 pont	
A metszéspontok abszcisszái: $x_1 = -2 \quad x_2 = 2$.	1 pont	
A CD húr a körlapból egy olyan körszeletet vág le, amelynek középponti szöge $\frac{\pi}{2}$ radián (=90°), mert	1 pont	
az OD és OC is egy-egy négyzet átlója,	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során látszik, jár az 1 pont.*
így $T_{körcikk} = \frac{1}{4}r^2\pi = 2\pi.$	1 pont	
A kérdezett területet megkaphatjuk, ha a negyedkör területéhez hozzáadjuk a parabolából az OC húr által lemetszett parabolaszelet területének kétszeresét.	2 pont	
A parabolából a OC húr által levágott parabolaszelet területét megkaphatjuk, ha az OBC derékszögű háromszög területéből a $[0\,;2]$ intervallumon számított parabola alatti területet kivonjuk.	1 pont	
$T_{parabolaszelet} = T_{OBC} - \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx =$ $= 2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$	3 pont	*Pontbontás a helyes egyenlőségek alapján lehetséges.*
$T = T_{körcikk} + 2T_{parabolaszelet} = 2\pi + 2\cdot\frac{2}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$ területegység.	1 pont	$2\pi + \frac{4}{3} \approx 7{,}62$
Összesen:	**16 pont**	

6. a) **első megoldás**		
A számba veendő háromszögek oldalait az *ABCDE* ötszög • két oldala és egy átlója; • egy oldala és két átlója vagy átlóegyenese; • három átlója (illetve átlóegyenese) határolja.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor jár, ha a háromszögek összeszámlálását a vizsgázó valamilyen célravezető rendszerben végzi. A 2 pont jár akkor is, ha nem fogalmaz meg helyes rendszert, de helyes eredményre jut.*
5 darab olyan háromszög van, amelynek két oldala a nagy ötszög két szomszédos oldala.	1 pont	
$5\cdot4=20$ olyan háromszög van, amelynek csak egy oldala a nagy ötszög oldala. (Például az *AB* oldalon nyugvó háromszögek: *ABR*, *ABS*, *ABT*, *ABD*.)	1 pont	
Ha a háromszög mindhárom oldalegyenese átló illetve átlóegyenes, akkor (mivel az átlóegyenesek közül bármely három egy háromszöget határoz meg) ilyen háromszögből $\binom{5}{3}=10$ db van.	1 pont	
A fenti felsorolásban szereplő háromszögek mind különbözők, azaz összesen 35 háromszög van az ábrán.	1 pont	
A lényegesen különböző háromszögek szögei is különböznek egymástól. A számbavett háromszögek szögei: vagy 36°, 36°és 108°, vagy 72°, 72°és 36°.	1 pont	*Ha ez a gondolat ábrán vagy vázlatrajzon jelenik meg, jár a pont.*
Ezért kétféle lényegesen különböző háromszög van az ábrán.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. a) **második megoldás**		
A számba veendő háromszögek szögei: vagy 36°, 36°és 108°, vagy 72°, 72°és 36°.	1 pont	
Ezért kétféle lényegesen különböző háromszög van az ábrán.	1 pont	
Az olyan háromszögekből, amelynek a szögei 36°, 36°és 108°, két méret van: a leghosszabb oldal vagy az *ABCDE* ötszög átlója vagy az oldala.	1 pont	
Az ilyen háromszögek száma 10+5=15.	1 pont	
Az olyan háromszögekből, amelynek a szögei 72°, 72°és 36°, három méret van: a legrövidebb oldal az *ABCD*E vagy a *PQRST* ötszög egy-egy oldala, illetve a csillagötszög egy-egy oldala.	2 pont	
Az ilyen háromszögek száma 5+5+10=20.	1 pont	
Összesen 35 háromszög van az ábrán.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b)		
Az *ABCQ* négyszög rombusz, mert szemközti szögei egyenlők: 72° illetve 108°. Ha az ötszög (a rombusz) oldalát a-val jelöljük: $a^2 \cdot \sin 108° = 120.$ $(a \approx 11{,}232 cm)$.	1 pont	
A szabályos ötszög területét az 5 egybevágó középponti háromszög (*ABO*) területéből számíthatjuk: $T_{ABCDE} = 5 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = \frac{5}{4} a^2 \cdot \mathrm{tg} 54°$, ahol $m = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg} 54°$.	1 pont	
$T_{ABCDE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{120}{\sin 108°} \cdot \mathrm{tg}\ 54°$.	1 pont	
$T_{ABCDE} \approx 217\ \mathrm{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c)		
1. állítás: igaz,	1 pont	
mert a 10 pont mindegyikének 4 a fokszáma, a fokszámok összege 40, ami az élek számának kétszerese.	1 pont	
2. állítás: igaz,	1 pont	
például: *ABCDEQPTA* egy nyolcpontú kör.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a)		
Az eladásból származó havi bevétel: $x(36 - 0{,}03x)$ euró.	1 pont	*Ha a bevételre nem másodfokú függvényt kap, az a) feladatrészre nem kap pontot.*
Az $x \mapsto -0{,}03x^2 + 36x$ $(x \in \mathbf{R})$, maximummal rendelkező másodfokú függvény.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során látszik, jár az 1 pont.*
A függvény zérushelyei: 0 és 1200,	1 pont	
ezért a függvény maximumhelye a 600.	1 pont	
Ez az érték a feltételek szerinti intervallumba tartozik.	1 pont	
A legnagyobb bevételt tehát 600 kg termék értékesítése esetén érik el, a legnagyobb bevétel 10 800 euró.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. b)		
A havi nyereség a havi bevétel és havi kiadás különbségével egyenlő. A havi nyereséget az $x \mapsto -0{,}03x^2 + 36x - (0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13000)$ $(100 < x < 700)$ függvény adja meg.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során látszik, jár az 1 pont.*
A nyereséget leíró függvény: $x \mapsto -0{,}0001x^3 - 0{,}03x^2 + 66{,}12x - 13\,000 (100<x<700)$	1 pont	
Ez a függvény deriválható, és deriváltja az $x \mapsto -0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 66{,}12 \quad (100<x<700)$ függvény.	1 pont	
A $-0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 66{,}12 = 0$ egyenletnek ($x^2 + 200x - 220\,400 = 0$) egy negatív (x_1=–580) és egy pozitív (x_2=380) valós gyöke van.	1 pont	
A deriváltfüggvény a]100; 380[intervallumon pozitív,	1 pont	
az]380; 700[intervallumon negatív,	1 pont	
tehát a nyereségfüggvény 380-ig szigorúan nő, majd szigorúan csökken.	1 pont	
A vizsgált függvénynek tehát egy abszolút maximumhelye van és ez 380.	1 pont	
A legnagyobb függvényérték 2306,4.	1 pont	
A legnagyobb havi nyereség tehát 380 kg termék eladása esetén keletkezik, értéke 2306,4 euró.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

8. a)		
Miki kétféleképpen fizethetett: 240 = 200+20+10+10 = 100+100+20+20.	2 pont	
Karcsi négyféleképpen fizethetett: 240 = 200+20+10+5+5 = 200+10+10+10+10	1 pont	
240 = 100+100+20+10+10 = 100+50+50+20+20.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b)		
Bandinak telitalálata háromféle esetben lehet: (1) az első húzásnál telitalálata van, és a második húzásnál is telitalálata van (ugyanazokat a számokat húzták ki kétszer egymás után): ennek valószínűsége $p \cdot p = p^2$,	1 pont	
(2) az első húzásnál telitalálata van, a másodiknál nincs telitalálata: ennek valószínűsége $p \cdot (1-p) = p - p^2$,	1 pont	
(3) az első húzásnál nincs telitalálata, a másodiknál telitalálata van: ennek valószínűsége $(1-p) \cdot p = p - p^2$.	1 pont	
Annak valószínűsége tehát, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen ezen három valószínűség összege: $2p - p^2$ (ez nem negatív, hiszen $0 < p < 1$).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Megadjuk a pontozását annak a megoldásnak, ami a komplementer eseményre épül: *A komplementer esemény: egyáltalán nincs telitalálata a két egymás utáni húzásnál:* *1 pont* *ennek valószínűsége* $(1-p)^2$, *1 pont* *azaz annak, hogy van telitalálata:* $1-(1-p)^2 = 2p - p^2$ *a valószínűsége.* *2 pont*		

8. c)		
Két esetet kell vizsgálni annak alapján, hogy Bandi a két szelvényét azonosan vagy különbözően töltötte-e ki.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár az 1 pont.*
(1) Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a telitalálat esélye p.	1 pont	
(2) Ha Bandi a két szelvényt különbözően tölti ki, akkor a telitalálatának esélye $2p$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. d)		
Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p - p^2$ vagy p a nagyobb.	1 pont	
Mivel $0 < p < 1$, ezért $2p - p^2 - p = p(1-p) > 0$, tehát az első játékszabály kedvezőbb.	1 pont	
Ha Bandi két különböző szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p - p^2$ vagy $2p$ a nagyobb.	1 pont	
Mivel $p^2>0$, ezért $2p - p^2 < 2p$, tehát a második játékszabály kedvezőbb.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a) első megoldás

Szemléltessük a feltételeket ábrával, ahol a hallgatók közül x főnek nincs német nyelvvizsgája és $(10580-x)$ főnek van német nyelvvizsgája,

	nincs német nyelvvizsgája (x fő)	van német nyelvvizsgája $(10580-x)$ fő
nincs angol nyelvvizsgája	nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája	van német, de nincs angol nyelvvizsgája
van angol nyelvvizsgája	nincs német, de van angol nyelvvizsgája	német és angol nyelvvizsgája is van

A feladat helyes értelmezése (komplementer halmazok).	1 pont	
A feladat feltétele alapján az x fő 70%-ának, vagyis $0{,}7x$ főnek nincs sem német sem angol nyelvvizsgája;	1 pont	
és a $(10580-x)$fő 30%-ának, vagyis $0{,}3\cdot(10580-x)$ főnek van német, de nincs angol vizsgája.	1 pont	
Tehát nincs angol nyelvvizsgája $0{,}7x+0{,}3\cdot(10580-x)=$	1 pont	
$=3174+0{,}4x$ főnek.	1 pont	
Így a feladat feltétele szerint a $(3174+0{,}4x)$ fő 60%-ának, vagyis $0{,}6\cdot(3174+0{,}4x)$ főnek nincs sem német sem angol nyelvvizsgája, mindezekből	1 pont	
$0{,}7x=0{,}6\cdot(3174+0{,}4x)$.	1 pont	
Innen $x=4140$.	2 pont	
A német nyelvvizsgával rendelkezők száma $(10580-x)$= 6440 fő.	1 pont	
Nincs angol nyelvvizsgája $3174+0{,}4x=4830$ főnek.	1 pont	
Van angol nyelvvizsgája 10 580–4 830=5 750 főnek.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

9. a) második megoldás

Szemléltessük a feltételeket ábrával, ahol a hallgatók közül n főnek nincs sem német sem angol nyelvvizsgája

	nincs német nyelvvizsgája	van német nyelvvizsgája
nincs angol nyelvvizsgája	nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája (n fő)	van német, de nincs angol nyelvvizsgája
van angol nyelvvizsgája	nincs német, de van angol nyelvvizsgája	német és angol nyelvvizsgája is van

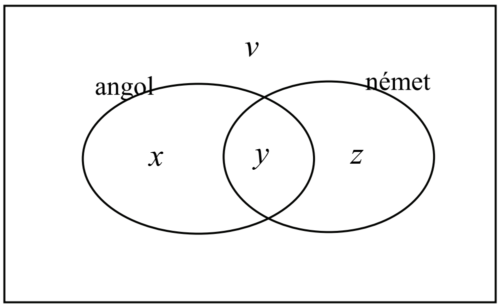
A feladat helyes értelmezése (komplementer halmazok).	1 pont	
A feladat feltétele alapján az n fő $\frac{100}{70}$ részének vagyis $\frac{10}{7}n$ nincs német nyelvvizsgája; és $\left(10\,580-\frac{10}{7}n\right)$ főnek van német nyelvvizsgája.	1 pont	
ez utóbbiak 30%-ának, vagyis $0{,}3\cdot\left(10\,580-\frac{10}{7}n\right)$ főnek van német, de nincs angol vizsgája.	1 pont	
Tehát nincs angol nyelvvizsgája $n+0{,}3\cdot\left(10\,580-\frac{10}{7}n\right)=$	1 pont	
$=3\,174+\frac{4}{7}n$ főnek.	1 pont	
Így a feladat feltétele szerint a $\left(3\,174+\frac{4}{7}n\right)$ fő 60%-ának, vagyis $0{,}6\cdot(3\,174+\frac{4}{7}n)$ főnek nincs sem német sem angol nyelvvizsgája, mindezekből	1 pont	
$n=0{,}6\cdot(3\,174+\frac{4}{7}n)$.	1 pont	
Innen $n=2\,898$.	2 pont	
A német nyelvvizsgával rendelkezők száma $\left(10\,580-\frac{10}{7}n\right)=6\,440$ fő.	1 pont	
Nincs angol nyelvvizsgája $3\,174+\frac{4}{7}n=4\,830$ főnek.	1 pont	
Van angol nyelvvizsgája 10 580–4 830=5 750 főnek.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

Beírjuk a halmazábrába a helyes elemszámokat:

	nincs német nyelvvizsgája (4140 fő)	van német nyelvvizsgája (6440 fő)
nincs angol nyelvvizsgája (4830 fő)	nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája (2898 fő)	van német, de nincs angol nyelvvizsgája (1932 fő)
van angol nyelvvizsgája (5750 fő)	nincs német, de van angol nyelvvizsgája (1242 fő)	német és angol nyelvvizsgája is van (4508 fő)

9. b)		
A német vizsgával rendelkező 6 440 fő 30%-a, (vagyis 1932 fő) nem vizsgázott angolból,	1 pont	
vagyis a német vizsgával rendelkezők 70%-a angolból is vizsgázott, ezek száma 4 508 fő.	1 pont	
$\frac{4\,508}{10\,580} = 0{,}426$.	1 pont	
A hallgatók 42,6%-ának van angolból és németből is nyelvvizsgája.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megadjuk a pontozást egy elképzelt négy ismeretlenes megoldáshoz.



A halmazábra, illetve az ismeretlenek egyértelmű bevezetése. *2 pont*

$0{,}7(x+v)=v$

$0{,}3(y+z)=z$

$0{,}6(v+z)=v$

$x+y+z+v=10\,580$

egyenletenként *1-1 pont (4 pont)*

Az ismeretlenek kiszámításához elvezető helyes rendezési lépések. *3 pont*

Megoldás: $x=1242$, $y=4508$, $z=1932$, $v=2898$.

az egyenletrendszer helyes megoldása: *4 pont*

a) $x+y=5750$ *(angol nyelvvizsgások száma.),* $y+z=6440$ *(német nyelvvizsgások száma.)*

helyes válaszonként *1-1 pont*

b) A hallgatók 42,6 %-ának van angolból és németből is nyelvvizsgája.

helyes válasz *1 pont*