

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2009. május 5.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A páros számokat tartalmazó részhalmazok: $\{6\}$; $\{28\}$; $\{6; 28\}$.	2 pont	<i>1 pontot kaphat a vizsgázó, ha csak két helyes részhalmazt ír fel. Szintén 1 pont jár, ha a helyes gondolatokat pontatlan jelölésekkel fejezi ki.</i>
Összesen:	2 pont	
2.		
$t = \frac{(a^3)^5}{a^{-2}} = a^{17}$	2 pont	<i>Ha az egyik azonosságot jól alkalmazza, akkor 1 pontot kap.</i>
Összesen:	2 pont	
3.		
Az állítás logikai értéke: IGAZ.	1 pont	
Az állítás megfordítása: Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 36-tal is.	1 pont	
Összesen:	2 pont	
4.		
A kézfogások száma 10.	2 pont	
Összesen:	2 pont	
5.		
Tudja, hogy $t_3 = 50000 \cdot 1,074^3$.	2 pont	
Három év múlva 61 942 forint van a számlán.	1 pont	<i>Hibás kerekítés esetén nem jár a pont.</i>
Összesen:	3 pont	
6.		
A lehetséges kódok: 2244; 2424; 2442; 4422; 4242; 4224.	3 pont	<i>1-1 pont járjon 2-2 kód helyes felírásáért.</i>
Összesen:	3 pont	

7.		
A legbővebb értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}$.	2 pont	1. Más módon megadott helyes válaszáért is 2 pont jár. 2. Ha a legbővebb értelmezési tartománynak csak a negatív valós számokat jelöli meg, 1 pont adható.
Összesen:	2 pont	

8.		
A helyes válasz: -1 .	2 pont	Ha a vizsgázó más értéket is megad, 0 pontot kap.
Összesen:	2 pont	

9.		
A háromszög átfogója 13 cm.	1 pont	Indoklásként jó ábra is elfogadható.
A derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja.	1 pont	
A körülírt kör sugara 6,5 cm.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

10.		
$g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$.	3 pont	Az argumentum helyes felírása 2 pont, a konstans jó megadása 1 pont.
Összesen:	3 pont	

11.		
$H \cup G = \{A; B; C; E; I; K; L; N; Ó; T\}$	3 pont	
Összesen:	3 pont	
1) Ha a vizsgázó helyesen felírja külön-külön a H és/vagy a G halmazt, de a válasza mégsem jó, kaphat 1-1 pontot. 2) Ha a $H \cup G$ halmazba minden szükséges elemet felsorol, de van olyan elem, amit többször is, 1 pont adható.		

12.		
Az egyenes egyenlete: $x - 2y = 8$.	3 pont	Bármelyik alakban felírt helyes egyenlet 3 pontot ér.
Összesen:	3 pont	Ha csak a párhuzamosság teljesül, akkor 1 pont jár.

II/A

13. a)		
Az egyenlet mindkét oldalán 3 hatványa áll, mert $9 = 3^2$.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat a megoldás során helyesen megjelenik, ez a pont is jár.</i>
A 3-as alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a kitevők egyenlők,	1 pont	
$x^2 - 3x - 10 = 0$.	1 pont	
$x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.	2 pont	
Mindkét x érték kielégíti az eredeti egyenletet, tehát az egyenlet két megoldása: $x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

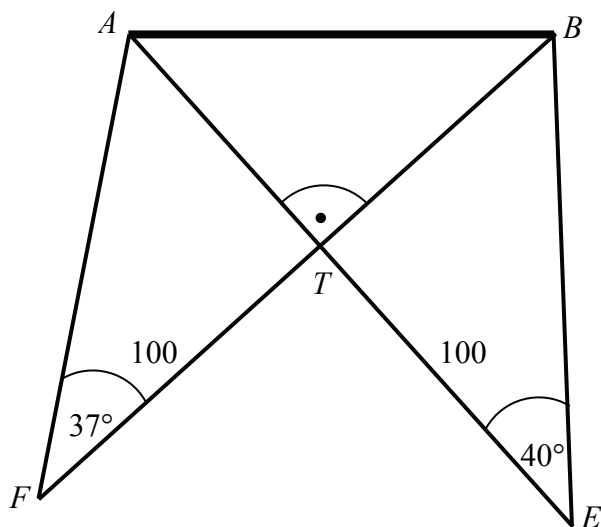
13. b)		
Az első egyenlőtlenség megoldása: $x < 2$.	2 pont	
A második egyenlőtlenség megoldása: $x \geq -2$.	2 pont	
Mindkét egyenlőtlenséget kielégítő egész számok a $\{-2; -1; 0; 1\}$ halmaz elemei.	2 pont	
Összesen:	6 pont	<i>Ha a válasza a $-2 \leq x < 2$, 1 ponttal kevesebbet kapjon.</i>

14. a)		
A 645 és a 654 közötti egészeket kell vizsgálni.	1 pont	
Az iskola létszámának 11 többszörösének kell lennie.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó egyenként megvizsgálja a szoba jövő számokat, akkor is jár a 3 pont.</i>
Az iskola tanulóinak száma 649.	2 pont	
Összesen:	5 pont	

14. b)		
56 gyerek legalább 180 cm magas.	1 pont	
$56 \cdot 0,75 = 42$ (a legalább 180 cm-esek közül) a kosaras.	1 pont	
Az iskolában $\frac{42}{70} \cdot 100 = 60$ tanuló kosarazik.	2 pont	
Összesen:	4 pont	

14. c)		
Legfeljebb 180 cm magas 568 tanuló.	1 pont	
$p = \frac{568}{616} \approx 0,922$ a valószínűsége, hogy legfeljebb 180 cm magas tanuló nyerje a főnyereményt.	2 pont	
Összesen:	3 pont	

15.



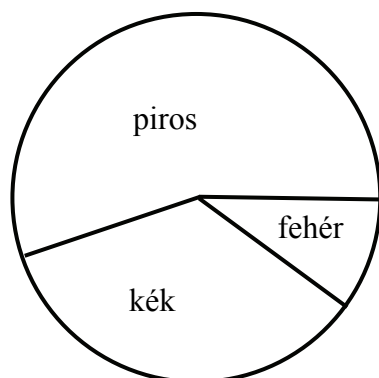
A feladat tartalmának megértését tükröző térképvázlat, jó jelölésekkel.	3 pont	<i>Nem várjuk el, hogy a térképvázlat a méretarányokat is tükrözze.</i>
<i>TBE és TAF derékszögű háromszögekben a tangens szögfüggvényt alkalmazzuk.</i>	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem hivatkozik a tangens szögfüggvényre, de jól alkalmazza, akkor is jár az 1 pont.</i>
$tg40^\circ = \frac{TB}{100}$.	1 pont	
$TB = 100 \cdot tg40^\circ (\approx 83,91)$.	1 pont	
$tg37^\circ = \frac{TA}{100}$.	1 pont	
$TA = 100 \cdot tg37^\circ (\approx 75,36)$.	1 pont	
Az <i>ABT</i> derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét: $AB^2 = TB^2 + TA^2$.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó nem hivatkozik a Pitagorasz tételére, de jól alkalmazza, akkor is jár a 2 pont.</i>
<i>TB</i> és <i>TA</i> értékét behelyettesítve $AB \approx \sqrt{12720} = 112,78$.	1 pont	
A fák távolsága méterre kerekítve 113.	1 pont	
Összesen:	12 pont	<i>Ha a vizsgázó nem helyesen kerekít, vagy nem megfelelő kerekítéssel számol (pl. közbülső értékeket pontatlanul használ), csak egyszer vonjunk le 1-et az adható pontból.</i>

II/B

16. első megoldás		
Az $\{a_n\}$ mértani sorozat és a $\{b_n\}$ számtani sorozat szóban forgó három-három tagjáról tudjuk, hogy $a_1 = b_1$; $a_2 = b_4$; $a_3 = b_{16}$.	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha a gondolat kifejtése nincs ugyan leírva, de az összefüggéseket helyesen használja a vizsgázó.</i>
Jelöljük a $\{b_n\}$ számtani sorozat különbségét d -vel.	1 pont	
A számtani sorozat szóban forgó tagjai ekkor: $b_1 = 5$; $b_4 = 5 + 3d$; $b_{16} = 5 + 15d$.	2 pont	
A mértani sorozat tagjaira a mértani közép összefüggés alapján: $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$	2 pont	
Behelyettesítve a megfelelő b_i értékeket kapjuk, hogy: $5 \cdot (5 + 15d) = (5 + 3d)^2$.	2 pont	
Rendezve az egyenletet: $9d^2 - 45d = 0$.	2 pont	
Innen $d_1 = 0$ és $d_2 = 5$.	2 pont	
Ha $d_1 = 0$, a számtani sorozat ötödik tagja 5, a mértani sorozat első öt tagjának összege 25.	2 pont	
Ha $d_2 = 5$, a sorozat ötödik tagja 25,	1 pont	
(a mértani sorozat szóbanforgó tagjai: 5, 20, 80, tehát) $q = 4$.	1 pont	
$s_5 = 5 \cdot \frac{4^5 - 1}{3} = 1705$.	1 pont	
Összesen:	17 pont	

16. második megoldás		
Az $\{a_n\}$ mértani sorozat és a $\{b_n\}$ számtani sorozat szóban forgó három-három tagjáról tudjuk, hogy $a_1 = b_1$; $a_2 = b_4$; $a_3 = b_{16}$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a gondolat kifejtése nincs ugyan leírva, de az összefüggést helyesen használja a vizsgázó.</i>
Jelöljük az $\{a_n\}$ mértani sorozat hányadosát q -val, a mértani sorozat szóban forgó tagjai ekkor: $a_1 = 5$; $a_2 = 5q$; $a_3 = 5q^2$.	2 pont	
A számtani sorozat különbségét d -vel jelölve: $b_4 - b_1 = 3d$ és $b_{16} - b_4 = 12d$.	2 pont	
E két összefüggésből kapjuk, hogy $4(b_4 - b_1) = b_{16} - b_4$.	1 pont	
Behelyettesítve a megfelelő a_i értékeket kapjuk, hogy: $4 \cdot (5q - 5) = 5q^2 - 5q$.	2 pont	
Rendezve az egyenletet: $q^2 - 5q + 4 = 0$.	2 pont	
Innen $q_1 = 1$ és $q_2 = 4$.	2 pont	
Ha $q = 1$, a számtani sorozat ötödik tagja 5, a mértani sorozat első öt tagjának összege 25.	2 pont	
Ha $q = 4$ (a mértani sorozat szóbanforgó tagjai: 5, 20, 80, tehát), a számtani sorozatban $d = 5$,	1 pont	
az ötödik tag 25,	1 pont	
A mértani sorozatban: $s_5 = 5 + 20 + 80 + 320 + 1280 = 1705$.	1 pont	
Összesen:	17 pont	

17. a)



Helyes ábra:

2 pont

A középponti szögek:

	fehér	kék	piros
fokban	36	126	198
radiánban	$0,2\pi$ ($\approx 0,6283$)	$0,7\pi$ ($\approx 2,1991$)	$1,1\pi$ ($\approx 3,45581$)

2 pont

A középponti szögek kiszámítása mértékegységenként 1-1 pont.

Összesen:

4 pont

17. b)

A kedvező esetek száma 54.

1 pont

$$p = \frac{54}{99} \approx 0,545.$$

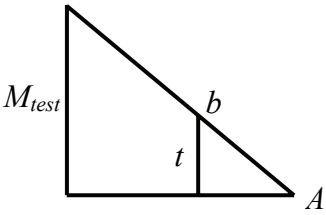
2 pont

Összesen:

3 pont

17. c)		
Bármelyik számozott golyó kihúzásának ugyanakkora a valószínűsége, tehát alkalmazható a klasszikus modell.		
Az összes esetek száma $n = 10^4$.	1 pont	
Az 1-10-ig felírt számokkal a 24-et a következő módokon állíthatjuk elő: a) 1, 1, 3, 8 b) 1, 1, 4, 6 c) 1, 2, 2, 6 d) 1, 2, 3, 4 e) 2, 2, 2, 3	5 pont	
A lehetséges sorrendek száma miatt: a), b), illetve c) 12-12 eset;	1 pont	<i>Akkor is jár az egy pont, ha valamelyik esetet nem vette észre.</i>
d) 24 eset;	1 pont	
e) 4 eset.	1 pont	
A keresett valószínűség így $\frac{64}{10000} = 0,0064$.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

18. a)		
A ponyva területe 6 egybevágó egyenlő szárú háromszög területének összege.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a gondolat csak a számolásban jelenik meg.</i>
Egy ilyen háromszög magassága m_o ; Pitagorasz tétele alapján: $m_o = \sqrt{M_{test}^2 + m_a^2}$, ahol m_a az alap egy középponti háromszögének magassága.	3 pont	<i>Egy megfelelő háromszög megtalálása 2 pont, Pitagorasz tételének alkalmazása 1 pont.</i>
$m_o = \sqrt{256 + \frac{3}{4} \cdot 144} = \sqrt{364} (\approx 19,08)$.	1 pont	
$A = 6 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sqrt{364} (\approx 686,87)$.	1 pont	
A ponyva felülete 687 m^2 .	1 pont	
Összesen:	7 pont	

18. b)		
Pitagorasz tétele alapján egy oldalél hossza: $b = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$	2 pont	
Egy kis támasztórúd t hossza: az A középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság miatt $t = \frac{1}{3} \cdot 16 = \frac{16}{3}$	2 pont	
		
A rudak összhossza: $M_{test} + 6 \cdot b + 6 \cdot t =$	1 pont	
$=168$ méter.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. c)		
A kifeszített kötél egy olyan síkmetszetet jelöl ki, amelyik párhuzamos a gúla alaplapjával, és a csúcstól $\frac{2}{3} M_{test}$ távolságra van,	2 pont	<i>Bármilyen jó indoklás 2 pontot ér.</i>
ezért a síkmetszet egy szabályos hatszög, amelynek egy oldala 8 m,	1 pont	
így a kifeszített kötél hossza 48 méter.	1 pont	
Összesen:	4 pont	