ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2009. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

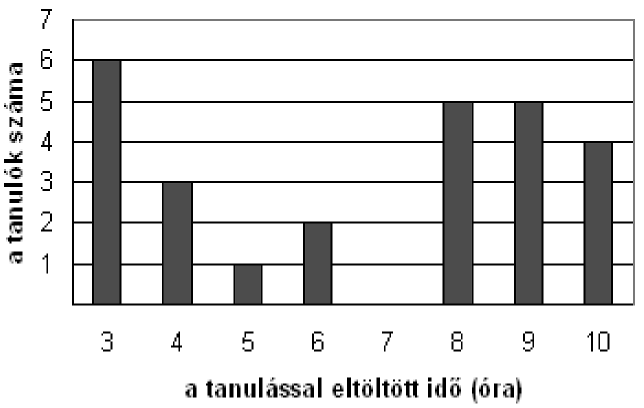
I.

1.

a)

$\overline{x}=\dfrac{3\cdot6+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot2+7\cdot0+8\cdot5+9\cdot5+10\cdot4}{26}$.	2 pont	
$\overline{x}=\dfrac{172}{26}$ óra $\approx 6{,}6$ óra .	1 pont	*Mértékegység nélküli helyes válaszért 1-1 pont jár. Ha a mediánt és a móduszt nem a 26 adatra vonatkoztatva állapítja meg, a 2-2 pontot elveszti.*
Módusz: 3 óra.	2 pont	
Medián: 8 óra.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

b)



(diagram)	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2.

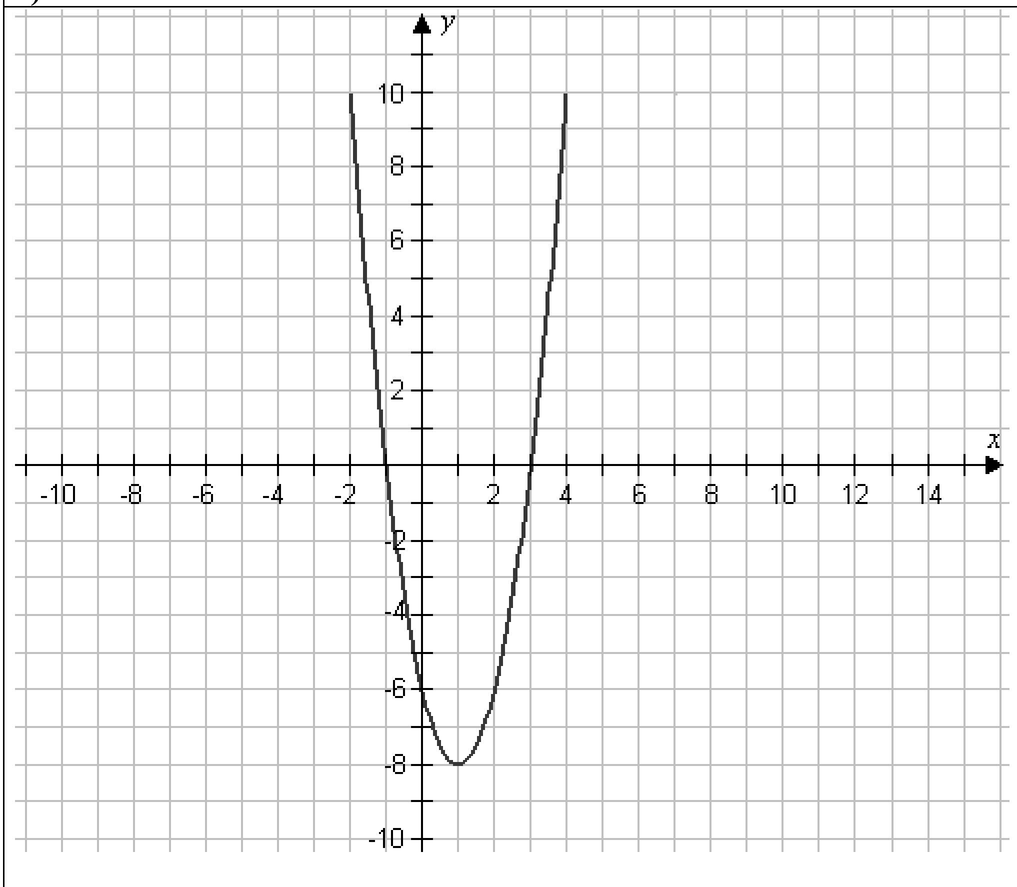
a)

Az A tipusú kávé egységára x, a B típusúé y.	1 pont	
A feltételek alapján: $20x + 30y = 93000$;	2 pont	
$30x + 20y = 87000$.	2 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1500$ és $y = 2100$.	4 pont	*Számolási hiba esetén legfeljebb 2 pont adható.*
A kávék egységára 1500 Ft, illetve 2100Ft.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

b)

Jelölje a az A típusú kávéból felhasznált mennyiséget, ekkor a B típusúból $60 – a$ kg-ot használnak fel.	1 pont	
Így $1500a + 2100(60 – a) = 120000$;	1 pont	
$a = 10$.	1 pont	
10 kg A típusú és 50 kg B típusú kávét használnak a keverékhez.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3.		
a)		
$2x^2 - 4x - 6 = 0$. $x_1 = 3$.	1 pont	
$x_2 = -1$.	1 pont	
$y = 2 \cdot (x-1)^2 - 8$.	2 pont	*A 3 pont akkor is jár, ha a minimum helyét a zérushelyek számtani közepeként számolja ki.*
A minimum helye: $x = 1$.	1 pont	
A minimum értéke: $y = -8$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

b)	
	3 pont
Összesen:	**3 pont**
Ha nem az adott intervallumon ábrázol, akkor legfeljebb 2 pont jár.	

c)		
A parabola egyenletében $a = 2$,	1 pont	
ezért $\left(\frac{1}{2p} = 2\right)$; $p = \frac{1}{4}$.	1 pont	
A fókuszpont a tengelypont felett van $\frac{p}{2}$ távolságra,	1 pont	
tehát $F\left(1; -\frac{63}{8}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Ha az a) kérdésre adott válaszai hibásak, és ezekkel jól dolgozik b) és /vagy c) kérdéseknél, az utóbbi teljes ponszámok járnak.

4.		
Értelmezési tartomány vizsgálata: I. $x^2 - 3x \geq 0$.	1 pont	
$x \leq 0$ vagy	1 pont	
$x \geq 3$.	1 pont	
II. $x + 2 > 0$.	1 pont	
$x > -2$.	1 pont	
I. és II. $-2 < x \leq 0$ vagy $3 \leq x$.	1 pont	
Egy szorzat negatív, ha tényezői különböző előjelűek.	1 pont	*Ha az első mondat nem szerepel, akkor is 3 pont.*
Mivel $\sqrt{x^2 - 3x}$ negatív nem lehet, ezért $\sqrt{x^2 - 3x} > 0$ és $\log_{0,1}(x+2) < 0$ kell legyen.	2 pont	
A gyökös egyenlőtlenség megoldása: $-2 < x < 0$ vagy $3 < x$.	1 pont	*Az* $x = 0$, $x = 3$ *esetek kizárásáért.*
Mivel a fenti logaritmus függvény szigorúan monoton csökken, ezért $x + 2 > 1$.	1 pont	*A helyes egyenlőtlenségért a szöveges indoklás nélkül is jár a pont.*
$x > -1$.	1 pont	
A megoldáshalmaz: $-1 < x < 0$ vagy	1 pont	
$3 < x$.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

II.

Az 5–9. feladatok közül a tanuló által megjelölt feladatot nem kell értékelni.

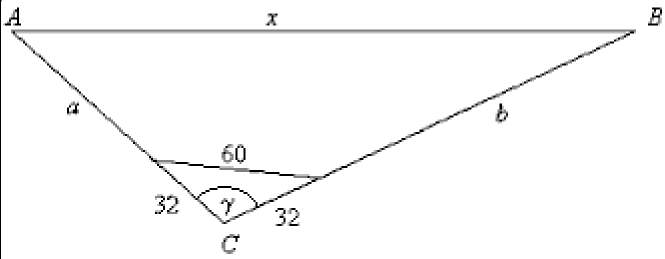
5.		
1. megoldás		
A mértani sorozat tagjai: a; $b = aq$ és $c = aq^2$.	1 pont	
Az első számtani sorozat tagjai: $a;\ aq;\ aq^2 - a - 2aq$.	1 pont	
A második számtani sorozat tagjai: a; $aq + 9$; aq^2.	1 pont	
Az első számtani sorozatból: $aq = \dfrac{a + aq^2 - a - 2aq}{2}$.	2 pont	
A második számtani sorozatból: $aq + 9 = \dfrac{a + aq^2}{2}$.	2 pont	
A fenti egyenletek rendezésével a következő egyenletrendszert kapjuk: $\left.\begin{array}{l} aq^2 - 4aq = 0 \\ aq^2 - 2aq + a = 18 \end{array}\right\}$.	2 pont	
Mivel $aq \neq 0$,	1 pont	
az első egyenletből: $q = 4$.	1 pont	
Így a második egyenletből: $a = 2$.	2 pont	
Ellenőrzés: mértani: 2; 8; 32; első számtani: 2; 8; 14; második számtani: 2; 17; 32.	2 pont	
Tehát $a = 2$; $b = 8$; $c = 32$.	1 pont	*Ezt az egy pontot akkor is megkaphatja, ha a mértani sorozat tagjait csak az ellenőrzés során adja meg.*
Összesen:	**16 pont**	

2. megoldás		
Az első számtani sorozat tagjai: a; b; $c - a - 2b$.	1 pont	
Ezért $a + c - a - 2b = 2b$. (1)	2 pont	
A második számtani sorozat tagjai: a; $b + 9$; c.	1 pont	
Ezért $a + c = 2b + 18$. (2)	2 pont	
$b^2 = ac$. (3)	1 pont	
(1)-ből: $c = 4b$. (4)	1 pont	
(2) és (4)-ből: $a = 18 - 2b$. (5)	1 pont	
(3), (4) és (5)-ből: $b^2 = 4b\,(18 - 2b)$.	1 pont	
$b > 0$ miatt	1 pont	
$b = 8$.	1 pont	
$a = 2$.	1 pont	
$c = 32$.	1 pont	
Ellenőrzés.	2 pont	
Összesen:	**16 pont**	

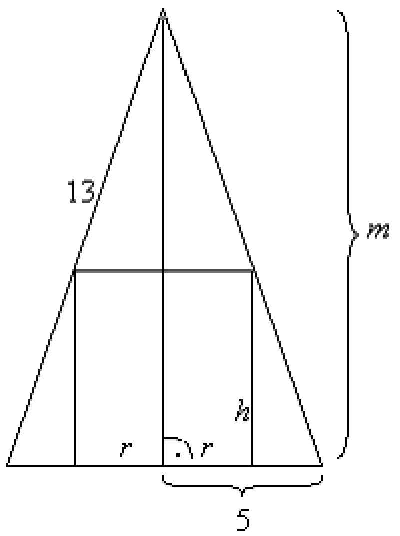
6.		
a)		
Az első helyre ötféle szám kerülhet,	1 pont	
a többi helyre hatféle.	1 pont	
$5\cdot 6^5$ = 38 880 hatjegyű számot készíthetünk.	1 pont	*Bármelyik alakban megadott helyes végeredmény elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

b)		
A hatjegyű szám vagy nullára vagy ötre végződhet.	1 pont	*Ha ez a mondat nem szerepel, de helyes a megoldás menete, ez a pont akkor is jár.*
Ha nullára végződik: 5!	1 pont	
Ha 5-re végződik: $4\cdot 4!$	2 pont	
Összesen 5! + $4\cdot 4!$ = 216.	2 pont	*Bármelyik alakban megadott helyes végeredmény elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

c)		
Azon hatjegyű számok száma, amelyekben legalább egy számjegy ismétlődik, megkapható úgy, hogy az adott számjegyekből képezhető összes hatjegyű számok számából kivonjuk azoknak a hatjegyűeknek a számát, amelyek csupa különböző számjegyekből állnak.	3 pont	*Ha ez a gondolat nincs ilyen részletesen leírva, de a megoldásból egyértelműen kiderül, hogy ezt használja, akkor is jár ez a 3 pont.*
Az ismétlődés nélküli hatjegyű számok száma: $5\cdot 5!$	2 pont	
Az összes lehetőségek száma: $5\cdot 6^5$.		*Erre az eredményre az a) kérdésnél pontozunk.*
Legalább egy ismétlődés van: $5\cdot 6^5 - 5\cdot 5!$ = 38 280.	2 pont	*Bármelyik alakban megadott végeredmény elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	

7.		
a)		
	2 pont	*A helyes ábráért, a lényeges adatok feltüntetéséért 2 pont. Ha nincs ábra, vagy hiányos, de a helyes megoldásból látszik a jó elképzelés, ez a két pont akkor is jár.*
A γ szög megállapítása: $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{30}{32}$.	1 pont	
$\gamma \approx 139{,}27°$.	1 pont	
A hangsebesség alapján a távolságok: $a=14\cdot 340=4760\ (\text{m})$ és	1 pont	
$b=18\cdot 340=6120\ (\text{m})$.	1 pont	
Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján: $x^2 = 4760^2 + 6120^2 - 2 \cdot 4760 \cdot 6120 \cdot \cos 139{,}27°$.	2 pont	
$x \approx 10\ 200$.	1 pont	
A két helyszín távolsága kb. 10 km.	1 pont	*Ez a pont a kilométerre kerekített értékért jár.*
Összesen:	**10 pont**	

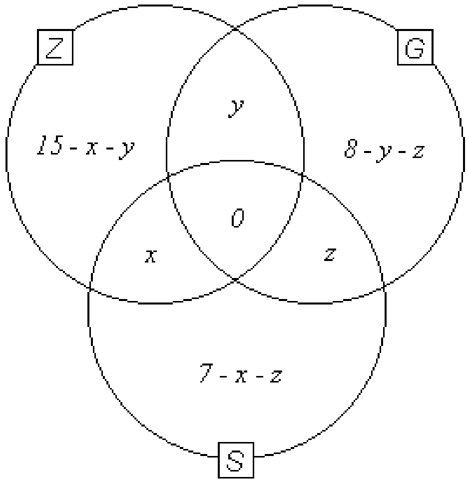
b)		
Legyen a teljes út s. A menetidő: $\frac{\frac{s}{2}}{2}+\frac{\frac{s}{2}}{5}$.	2 pont	
Az átlagsebesség: $\frac{s}{\frac{\frac{s}{2}}{2}+\frac{\frac{s}{2}}{5}}=\frac{2\cdot 2\cdot 5}{5+2}=$	2 pont	
$=\frac{20}{7}\approx 2{,}86$.	1 pont	
Az átlagsebesség ≈ 2,86 km/h.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Ha nem számolja ki a menetidőt, hanem a harmonikus közép ismeretében számolja ki az átlagsebességet, akkor is a teljes pontszám jár.*

8.		
1. megoldás		
	2 pont	*Ha nincs ábra, de a helyes megoldásból látszik a jó elképzelés, ez a 2 pont akkor is jár.*
$m=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (cm).	1 pont	
Azonos hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszögek alapján:	1 pont	
$\frac{h}{5-r}=\frac{m}{5}$.	2 pont	
Ebből $h=\frac{m(5-r)}{5}=\frac{12\cdot(5-r)}{5}=12-2{,}4r$.	1 pont	
A henger térfogata: $V(r)=r^2\pi(12-2{,}4r)=\pi(12r^2-2{,}4r^3)$, ahol $r\in\,]0;5[$.	2 pont	*A két pont az $r\in\,]0;5[$ megjegyzés nélkül is jár.*
$V'(r)=\pi(24r-7{,}2r^2)$.	2 pont	
Szélsőérték ott lehet, ahol $24r-7{,}2r^2=0$. $r\neq 0$, ezért $r=\frac{10}{3}$.	3 pont	*Szöveges magyarázat nélkül is jár a 3 pont.*
$r=\frac{10}{3}$ esetén a derivált $+\rightarrow-$ előjelet vált, ezért $V(r)$-nek maximuma van.	1 pont	
A henger sugara $\frac{10}{3}$ cm.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

2. megoldás		
V(*r*) meghatározásáig ez a megoldás megegyezik az 1. megoldással.	9 pont	
$V(r)=\pi\left(12r^2-2{,}4r^3\right)=2{,}4\pi\left(5r^2-r^3\right)=$ $=2{,}4\pi\cdot r\cdot r\cdot(5-r)=9{,}6\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(5-r).$	2 pont	
Elég az $\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(5-r)$ szorzat maximumát keresni, ahol $\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+5-r$ összeg állandó, értéke 5.	2 pont	
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján: $\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(5-r)\le\left(\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+5-r}{3}\right)^3=\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}.$	1 pont	
Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\frac{r}{2}=5-r$, azaz $r=\frac{10}{3}$.	1 pont	
A henger sugara $\frac{10}{3}$ cm.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

9.		
a)		
15 + 8 + 7 = 30, de csak 18 tanuló van, ezért 12-en vannak, akik kétféle hangszeren tanulnak.	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

b)



x tanuló van a $Z \cap S$ halmazban. y tanuló van a $Z \cap G$ halmazban.	1*pont	
Nincs olyan tanuló, aki egyszerre tanul gitározni és szaxofonozni, azaz a $G \cap S$ halmaz elemszáma, $z = 0$.	1 pont	*Ha ezek a halmazábrában szerepelnek, akkor is jár a 4 pont.*
$7 - x$ tanuló csak szaxofonozik.	1 pont	
$8 - y$ tanuló csak gitározik.	1 pont	
$x + y = 12$.	1 pont	
$7 - x = 2 \cdot (8 - y)$.	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 5$; $y = 7$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	
* Ez a pont vagy az itteni gondolatért, vagy a szöveges válaszért jár.		

c)

A 7 szaxofonos közül kettőt $\binom{7}{2}$-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
A 8 gitáros közül kettőt $\binom{8}{2}$-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
Kedvező esetek száma: $\binom{7}{2} + \binom{8}{2}$.	2 pont	
A 18 tanuló közül kettőt $\binom{18}{2}$-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{7}{2}+\binom{8}{2}}{\binom{18}{2}} \approx 0{,}32$.	1 pont	*A helyes végeredmény bármelyik alakban elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	