Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2009. október 20.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2009. október 20. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** <u>Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.</u>

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0{,}5^{2-\log_{0,5} x} = 3$, ahol $x > 0$ és $x \in \mathbf{R}$.

b) $7 + 6\log_x \frac{1}{2} = \log_2 x$, ahol $1 < x \leq 2$ és $x \in \mathbf{R}$.

a)	4 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	11 pont	

2. István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek $120°$-os szöget zárnak be.

a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek bekerítéséhez?

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?” – kérdezte Péter.
„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100 m^2 alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építtetjük” – válaszolt István.
„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el” – szólt nevetve Péter.

b) Rajzolja le, hogy milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter!

c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m^2-re kerekítve adja meg!)

a)	4 pont	
b)	2 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Az **a** és **b** vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
$\mathbf{a}(\cos t\,;\,\sin t)$ és $\mathbf{b}(\sin^2 t\,;\,\cos^2 t)$.

a) Adja meg az **a** és **b** vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli!

b) Mekkora az **a** és **b** vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!)

c) Határozza meg a t olyan valós értékeit, amelyek esetén az **a** és **b** vektorok merőlegesek egymásra!

a)	2 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

4. Az (a_n) mértani és a (b_n) számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja (-1).

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját!

b) Milyen pozitív egész n-re lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora?

a)	4 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve *B* betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól még a következőket tudjuk:

- csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;
- egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;
- Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani – sikertelenül.

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a **c)** pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű?

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerelésben árulják.

a) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntenénk?

Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki.

b) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra!)

Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft.

c) Ha ezeket az árakat a **b)** részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát?

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. Mindannyian ugyanazt a valószínűséget mondták. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

a)	5 pont	
b)	11 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

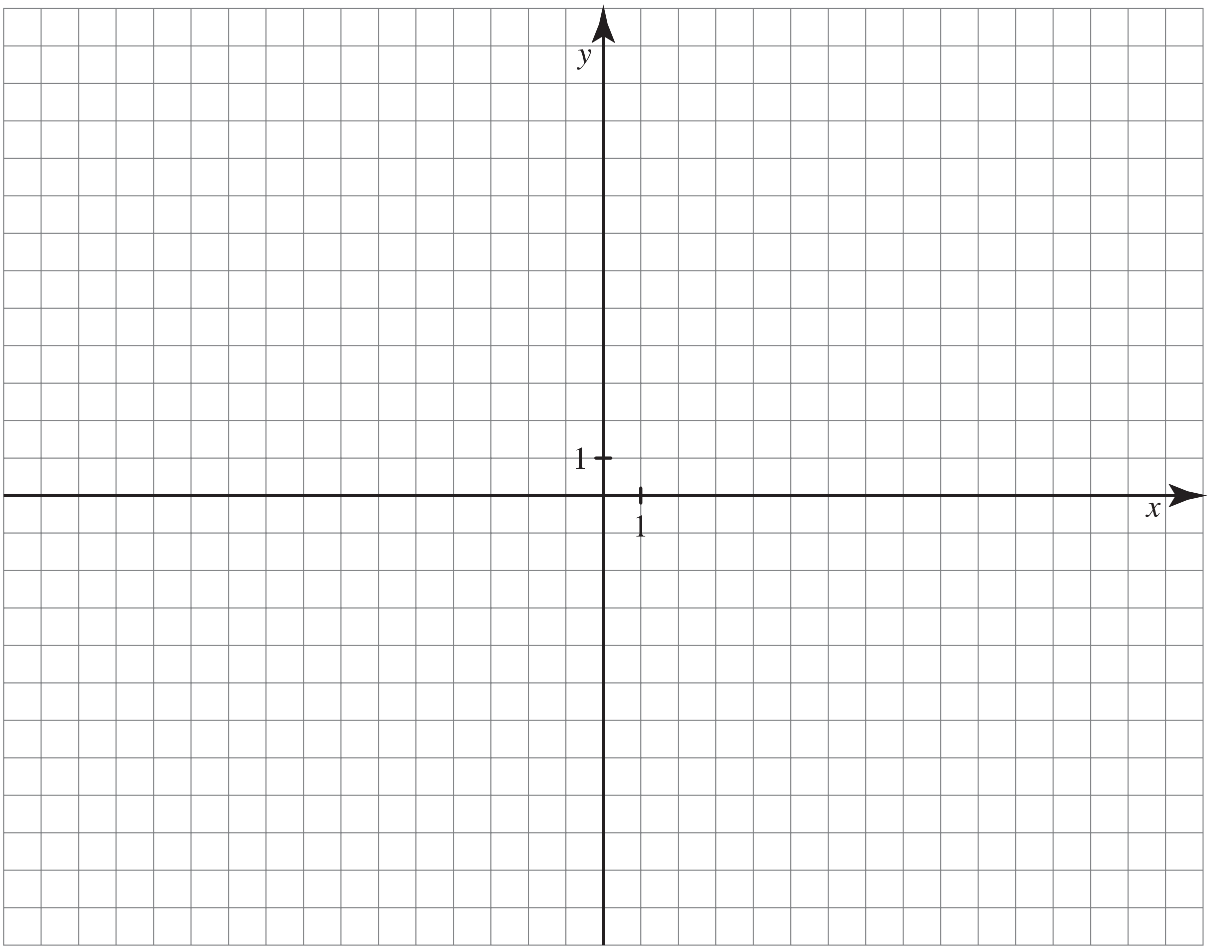
8. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0\,;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (*A* és *B*) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az *A* és a *B* pont koordinátáit!

b) Írja fel az *ABC* háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja *D*. Határozza meg a *D* pont koordinátáit!

c) Mekkora területű részekre bontja az *ABC* háromszöget a parabola íve?

a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	



Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával.
Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.)

Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$.

Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	13			
	3.	14			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	elért pontszám	programba beírt pontszám
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző