ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. május 6.

# MATEMATIKA

## KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

## JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

# Fontos tudnivalók

## Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

## Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

# I.

| 1. | | |
|---|---|---|
| $x$ lehetséges értékei: 1; 4; 7. | 2 pont | *A 2 pont nem bontható.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 2. | | |
|---|---|---|
| A tompaszög: 135 °. | 2 pont | *–45° felírásáért nem kap pontot. Ha a 135°-hoz periódust is feltüntet, 1 pontot kap.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 3. | | |
|---|---|---|
| a) 8 | 1 pont | |
| b) 10 | 1 pont | |
| c) 34 | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 4. | | |
|---|---|---|
| $x = -6$. | 1 pont | |
| A legkisebb függvényérték: 0. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 5. | | |
|---|---|---|
| A helyes válasz betűjele: b | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 6. | | |
|---|---|---|
| Legalább 17 tanuló 168 cm magas, vagy annál alacsonyabb.<br>Vagy: legalább 17 tanuló van, aki 168 cm magas, vagy annál magasabb. | 2 pont | *Az 2 pontot megkaphatja, ha bármilyen megfogalmazásban, de jó tartalommal alkalmazza a medián fogalmát. 1 pontot kaphat, aki indoklásában feltételezi, hogy pontosan egy 168 cm magas tanuló van a sorban.* |
| A válasz: nem lehetséges. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **7.** | | |
|---|---|---|
| $a-2\sqrt{ab}+b$ | 2 pont | $(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$ *alakban megadva 1 pont,* $a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b$ *alak 2 pont.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **8.** | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$ | 1 pont | *Helyes válasz esetén ez a pont is jár.* |
| $\overrightarrow{AF}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **9.** | | |
|---|---|---|
| Az összpontszám 1%-a 2,5. | 1 pont | *Bármilyen helyes indoklás esetén jár a 2 pont.* |
| 8·2,5=20 | 1 pont | |
| A férfiak 20 ponttal szereztek többet. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **10.** | | |
|---|---|---|
| A) hamis<br>B) igaz<br>C) igaz<br>D) hamis | 4 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **11.** | | |
|---|---|---|
| A helyes ábrán megjelenő tulajdonságok:<br>a gráfon A csúcs fokszáma 4, | 1 pont | |
| a többi csúcs mindegyike 3 fokszámú, | 1 pont | |
| az E és D csúcsokat nem köti össze él. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **12.** | | |
|---|---|---|
| A felvágáskor 40 gyékénydarab keletkezik, | 1 pont | |
| az egymásra rakott darabok 60 (=40·1,5) cm magasságot érnek el. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | *Ha a gondolatmenet jó, de a mértékegységekkel hibásan számol, legfeljebb 1 pont adható.* |

# II/A

## 13. a)

| | | |
|---|---|---|
| A hetente gyártott termékszámok $a_1=200$, $d=3$ adatokkal megadható számtani sorozat elemei. | 1 pont | *Akkor is jár a pont, ha ez a gondolat csak a képletek használatából derül ki.* |
| A 15. héten $a_{15}=200+14\cdot3=242$ terméket gyártottak. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

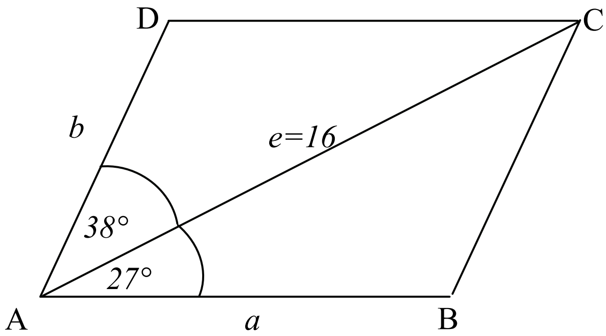
## 13. b)

| | | |
|---|---|---|
| $S_{52}=\frac{a_1+a_{52}}{2}\cdot 52$ adja a keresett termékszámot. | 2 pont | *Akkor is jár a 2 pont, ha ez a gondolat csak a képletek használatából derül ki.* |
| $S_{52}=\frac{200+200+153}{2}\cdot 52$ | 1 pont | |
| 14 378 termék készül el egy év alatt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

## 13. c)

| | | |
|---|---|---|
| A megduplázódott termékszám: 400. | 1 pont | |
| $400 \le 200 + (n-1)\cdot 3$ | 1 pont | *Egyenlőség alkalmazása esetén is jár a 3 pont.* |
| $n \ge 67\frac{2}{3}$ | 2 pont | |
| 68 hétnek kell eltelnie. | 1 pont | *Ha itt $67\frac{2}{3}$-ot válaszol, ez a pont nem jár.* |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

**14.**




| | | |
|---|---|---|
| A paralelogramma egyik szöge 65°, a másik szöge 115°. | 2 pont | |
| Az oldalakat az *ACD* háromszögben alkalmazott szinusztétel segítségével számítjuk ki. | 1 pont | *Ez az 1 pont akkor is jár, ha a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.* |
| $\frac{a}{e}=\frac{\sin 38°}{\sin 115°}$ | 2 pont | |
| $a=16\cdot\frac{\sin 38°}{\sin 115°}\approx 11$ | 1 pont | |
| $b=16\cdot\frac{\sin 27°}{\sin 115°}\approx 8$ | 3 pont | |
| $k=38$ cm | 1 pont | |
| $t=ab\cdot\sin 65° \approx 8\cdot 11\cdot\sin 65° \approx 80$ cm$^2$ | 2 pont | *Fogadjuk el a 79 cm$^2$ választ is (kerekítések sorrendje).* |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

*Hibás kerekítésekért összesen 1 pontot veszítsen a 12 pontból.*

| **15. a)** | | |
|---|---|---|
| A 11 vizsgázó közül kell hatot (vagy ötöt) kiválasztani minden lehetséges módon úgy, hogy a sorrend nem számít. | 1 pont | *Ha ez a gondolat csak a számolásból derül ki, akkor is jár az 1 pont.* |
| $\binom{11}{6}=\binom{11}{5}$ | 1 pont | *Bármelyik alak 1 pontot ér.* |
| 462 féleképpen választható ki az első vizsgázó csoport. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **15. b)** | | |
|---|---|---|
| Nem, | 1 pont | |
| mert a hat felelet 6! = 720 féle sorrendben hangozhat el. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

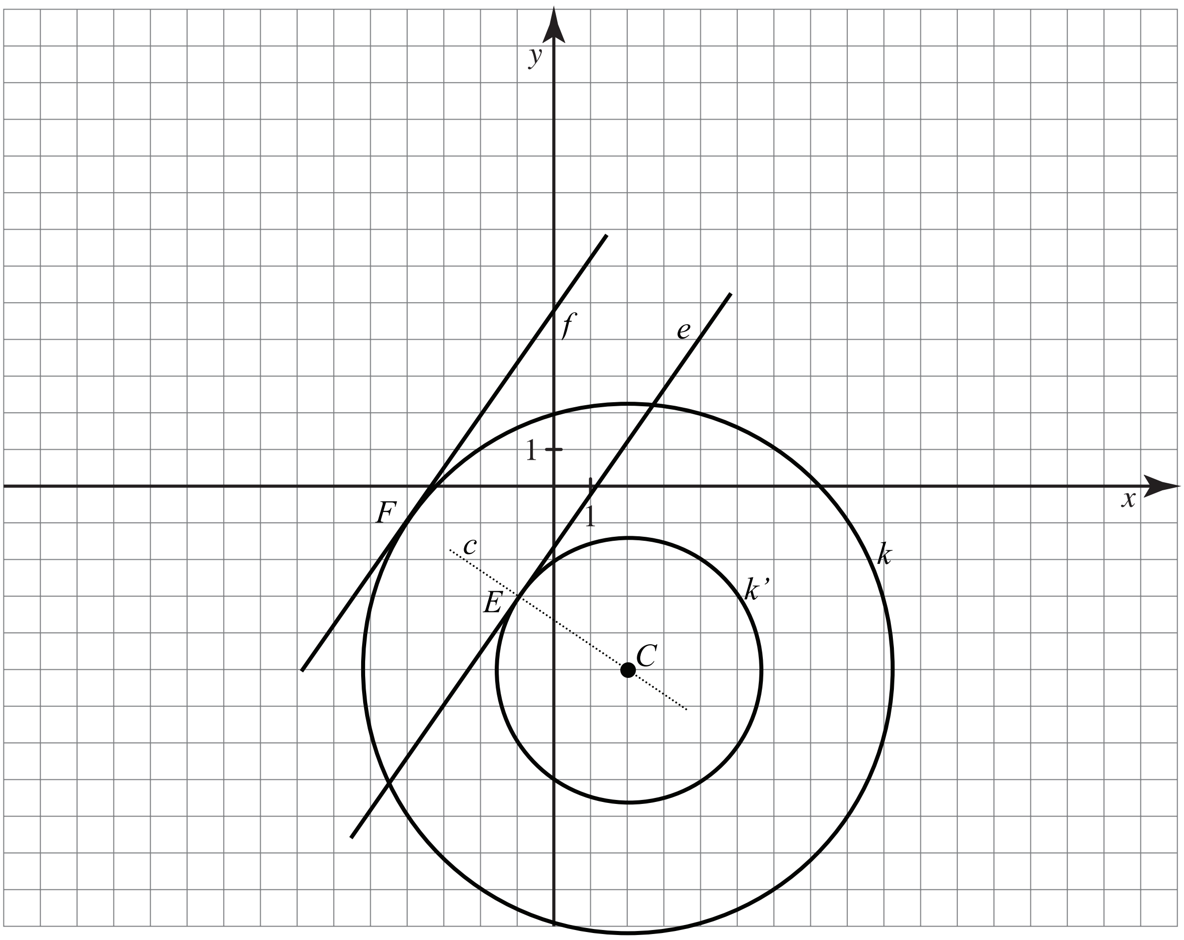
| **15. c)** | | |
|---|---|---|
| A tételek között 12 szól nem a XX. századi magyar irodalomról. | 1 pont | |
| A kedvező esetek száma 12, az összes (egyenlően valószínű) eset száma: 20. | 1 pont | |
| A keresett valószínűség (a klasszikus modell alkalmazásával) $p=\frac{12}{20}(=0{,}6)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | *Indoklás nélküli helyes válaszért legfeljebb 2 pont adható.* |

| **15. d)** | | |
|---|---|---|
| Az első csoportban kihúztak 6 tételt, a másodikban egyet, tehát a kérdéses diák 13 tételből húz, | 2 pont | |
| még hét XX. századi magyar irodalom tételből húzhat (ez a kedvező esetek száma), | 1 pont | |
| a keresett valószínűség (a klasszikus modell alkalmazásával) $p=\frac{7}{13}(\approx 0{,}54)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | *Indoklás nélküli helyes válaszért legfeljebb 2 pont adható.* |

# II/B

| 16. a) | | |
|---|---|---|
| *k* és *f* közös pontjait az egyenletrendszerük megoldása adja. | 1 pont | *Akkor is jár a pont, ha ez a gondolat a megoldás menetében jelenik csak meg.* |
| $y$ behelyettesítése után $3{,}25x^2 + 26x + 52 = 0$ | 2 pont | |
| $x_{1,2} = -4$ | 1 pont | |
| *k* és *f* egyetlen közös pontja $F(-4; -1)$ pont. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |
| *Ha a közös pont koordinátáit nem számítással kapja, hanem helyes ábráról jól olvassa le, akkor az 5 pontból 1 pont adható.* | | |

## 16. b)




| | | |
|---|---|---|
| *E* koordinátáit a *C*-ből *e*-re bocsátott *c* merőleges egyenes és *e* egyenletrendszerének megoldása adja. | 1 pont | *Jár a pont, ha a megoldásban ez a gondolat megjelenik.* |

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{n}_c$ (2;3) | 1 pont | |
| $c$ egyenlete: $2x + 3y = -11$ | 1 pont | |
| $e \cap c = E\,(-1; -3)$ | 2 pont | |
| A kör sugara a $CE$ szakasz, $r^2 = 13$. | 1 pont | |
| A $k'$ kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 13$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |
| *Ha az érintési pont koordinátáit nem számítással kapja, hanem helyes ábráról jól olvassa le, akkor az első 5 pontból 2 pont adható.* | | |

| **16. c)** | | |
|---|---|---|
| $k$ egyenlete átalakítva:<br>$(x-2)^2+(y+5)^2-52=0$, | 2 pont | *A 2 pont nem bontható.* |
| tehát $k$ középpontja a $K$ (2,–5) pont, sugara $R=\sqrt{52}$. | 1 pont | |
| $k$ és $k'$ koncentrikus körök, | 1 pont | |
| $R=2r$ (mivel $2\sqrt{13}=\sqrt{52}$ ),<br>ezért $k$ a $k'$-nek kétszeres nagyított képe $C$-ből. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

<table>
<tr><td colspan="3">17. a)</td></tr>
<tr><td>A kerekítés szabályainak érvényesülését vizsgáljuk:<br>
<table>
<tr><td></td><td>1980</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>Debrecen</td><td>jó</td><td>jó</td></tr>
<tr><td>Győr</td><td>hibás</td><td>jó</td></tr>
<tr><td>Pécs</td><td>hibás</td><td>hibás</td></tr>
</table></td><td>3 pont</td><td>Hibátlan soronként 1-1 pont.</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>3 pont</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">17. b)</td></tr>
<tr><td>Az átlag 1980-ban: $153671 \approx 153700$,<br>2000-ben $148014 \approx 148000$</td><td>2 pont</td><td>Ha nem kerekít százasokra, akkor is 2 pontot kaphat.</td></tr>
<tr><td>$\frac{148000}{153700}$ vagy $\frac{148014}{153671} \approx 0{,}963$</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>tehát az átlagos lélekszám 3,7%-kal csökkent.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

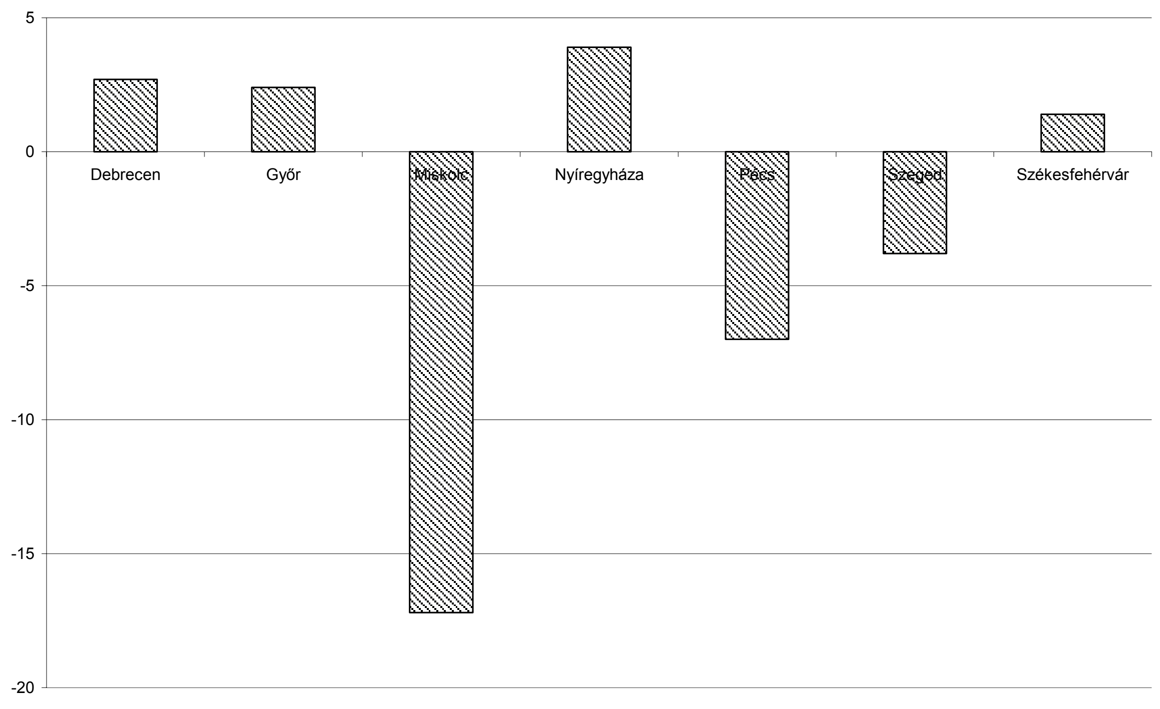
## 17. c)

A változás mértékét és jellegét táblázatba foglaljuk:

| | A változás aránya | Százalékos jellege |
|---|---|---|
| Debrecen | *1,027* | 2,7% növekedés |
| Győr | 1,024 | 2,4% növekedés |
| Miskolc | 0,828 | 17,2% csökkenés |
| Nyíregyháza | 1,039 | 3,9% növekedés |
| Pécs | 0,930 | 7,0% csökkenés |
| Szeged | 0,962 | *3,8% csökkenés* |
| Székesfehérvár | 1,014 | 1,4% növekedés |

| | | |
|---|---|---|
| Oszloponként 2-2 pont. | 4 pont | *Oszloponként legfeljebb 2 hiba esetén 1-1 pont.* |
| A népesség növekedésének aránya szerint Nyíregyháza fejlődött leginkább. | 1 pont | |
| Legnagyobb arányban Miskolc népessége változott. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

## 17. d)




| | | |
|---|---|---|
| A lépték helyes megválasztása. | 1 pont | *Ha az egységet nem jelölte, ezt a pontot nem kaphatja meg.* |
| Helyes grafikon elkészítése. | 2 pont | *Legfeljebb 2 téves oszlopméret esetén 1 pont jár.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **18. a)** | | |
|---|---|---|
| $t = 0$; $m$ (0)-át keressük. | 2 pont | *A 2 pont akkor is jár, ha a számolásból látszik, hogy jól használja ezt a gondolatot.* |
| $m$ (0) = 0,8 a tenyészet tömege (milligrammban) a megfigyelés kezdetekor. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **18. b)** | | |
|---|---|---|
| Az első 24 óra elteltével a tenyészet tömege $m(24) = 0{,}8 \cdot 10^{0{,}48} =$ | 1 pont | |
| =2,4 (mg) | 1 pont | |
| A tenyészet tömege 48 óra elteltével $m(48) = 0{,}8 \cdot 10^{0{,}96} =$ | 2 pont | |
| =7,3 (mg) | 1 pont | |
| A tömeg növekedése a második 24 órában 7,3 – 2,4 = 4,9 (mg). | 2 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **18. c)** | | |
|---|---|---|
| A választ a $12{,}68 = 0{,}8 \cdot 10^{0{,}02t}$ egyenlet megoldásával keressük. | 2 pont | *Akkor is jár a 2 pont, ha ez a gondolat csak a számításban jelenik meg.* |
| $15{,}85 = 10^{0{,}02t}$ | 1 pont | |
| $\lg 15{,}85 = 0{,}02t$ | 2 pont | |
| t = 60 (óra), | 1 pont | |
| tehát a megfigyelés harmadik napján kellett a munkát abbahagyni. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |