

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. május 6.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS  
MINISZTERIUM**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

**I.**

<b>1.</b>		
Egy számtani sorozat páros sorszámú, illetve páratlan sorszámú tagjai is számtani sorozatot alkotnak.	1 pont	<i>Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, akkor ez a pont jár.</i>
Páratlan sorszámú tag összesen 11 darab van, páros sorszámú pedig 10.	1 pont	
A feladat feltétele szerint: $\frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 11 = \frac{a_2 + a_{20}}{2} \cdot 10 + 15.$	2 pont	<i>A páratlan, illetve páros sorszámú tagok összegének felírása 1 pont, a szöveg szerinti kapcsolat felírása 1 pont.</i>
Legyen az eredeti sorozat különbsége $d$ , ezzel felírva az egyenletet: $\frac{a_1 + a_1 + 20d}{2} \cdot 11 = \frac{a_1 + d + a_1 + 19d}{2} \cdot 10 + 15.$	1 pont	
Átrendezve: $2a_1 + 20d = 30.$	1 pont	
A feladat másik feltételét hasonlóan átírva: $a_1 + 19d = 3(a_1 + 8d).$	2 pont	
Átrendezve: $2a_1 + 5d = 0.$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $a_1 = -5, d = 2.$	2 pont	
A keresett tag: $a_{15} = -5 + 14 \cdot 2 = 23,$ és ez megfelel a feladat feltételeinek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

<b>2. a)</b>		
Jelölje $a$ a 9-10. évfolyamos tanulók számát, $A$ pedig az átlagpontoszámukat. A 11-12. évfolyamos tanulók száma a feltétel alapján $100 - a$ .	1 pont	
A feltétel alapján $a = 1,5 \cdot (100 - a)$ , ahonnan $a = 60$ . A 9-10. évfolyamos tanulók száma tehát 60, a 11-12. évfolyamos tanulóké pedig 40.	2 pont	
Ha $B$ jelöli a 11-12. évfolyamos tanulók átlagpontoszámát, akkor $1,5A = B$ .	1 pont	
Az átlagpontoszám az előzőeket felhasználva: $100 = \frac{60A + 40B}{100} = \frac{80B}{100} = \frac{4B}{5}.$	2 pont	
Innen $B = 125$ , azaz a 11-12. osztályos tanulók átlagpontoszáma 125.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	<i>Ha <math>A</math> értékét számítja, jó kerekítésekkel dolgozik és úgy válaszol, a 7 pont akkor is jár.</i>

<b>2. b)</b>		
A 100 tanulóból 3 tanuló kiválasztására $\binom{100}{3}$ ( $= 161700$ ) egyenlően valószínű lehetőség van.	1 pont	
A feltételnek megfelelő kiválasztás lehetőségeinek a száma: $\binom{60}{2} \cdot \binom{40}{1}$ ( $= 70800$ ),	1 pont	
ugyanis a két és egy tanuló kiválasztása egymástól függetlenül történik.	1 pont	
A keresett valószínűség: $P = \frac{\binom{60}{2} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{100}{3}},$	1 pont	
azaz $P = \frac{70800}{161700}$ ( $\approx 0,44$ ).	1 pont	<i>44% megadásáért is 1 pont jár</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>3.</b>		
Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van egy darab kétszeres valós gyöke, ha a diszkriminánsa 0.	1 pont	<i>Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, akkor ez a pont jár.</i>
Az egyenlet diszkriminánsára nézve tehát: $16(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (1 + \sin \alpha) = 0$ .	2 pont	
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 - \sin \alpha = 0$	2 pont	
Felhasználva, a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosságot, kapjuk, hogy $2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0$ .	1 pont	
<b>Első megoldás</b>		
$\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1) = 0$	2 pont	<i>Bármely jól befejezhető módszer esetén jár ez a 2 pont.</i>
Ez akkor teljesülhet, ha a) $\sin \alpha = 0$ , tehát $\alpha = k\pi$ , ahol $k \in \mathbf{Z}$ ;	1 pont	<i>Ha hamis gyököt is kap, és elfogadja, vagy a kapott gyökrendszerek felírása hiányos, az 5 pontból legfeljebb 3-at kaphat.</i>
b) $2 \cos \alpha - 1 = 0$ , tehát $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ , $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ , ahol $n \in \mathbf{Z}$ ,	1 pont	
vagy $\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2m\pi$ , ahol $m \in \mathbf{Z}$ .	1 pont	
Ekvivalens átalakítások miatt a kapott gyöksorozatok kielégítik a kiindulási egyenletet.	1 pont	
<b>Második megoldás</b>		
$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha$ mindkét oldalt négyzetre emelve, rendezve $3 \sin^2 \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) = 0$	2 pont	
$\sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = n\pi, n \in \mathbf{Z}$	1 pont	
$\sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + 2l\pi; k, l \in \mathbf{Z}$	2 pont	
Hamis gyökök kiszűrése	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>13 pont</b>	

<b>4. a)</b>		
A rádiós tudósításakor összesített szavazatok száma: $10500 \cdot 0,76 \cdot 0,9 = 7182$	1 pont	
Az eddig leadott érvénytelen szavazatok száma: $7182 - (2014 + 2229 + 2805) = 134$	1 pont	
Ez az eddig leadott szavazatoknak $\approx 1,9\%$ -a	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4. b)</b>		
$\frac{2014}{7182} \approx 0,2804$ , azaz Alkimista a szavazatok 28%-ával rendelkezett; $\frac{2229}{7182} \approx 0,3104$ , azaz Bagoly a szavazatok 31%-át kapta; $\frac{2805}{7182} \approx 0,3906$ , azaz Flótás az eddig feldolgozott szavazatok 39%-át kapta	1 pont	
A megfelelő középponti szögek: Alkimista— $101^\circ$ ; Bagoly— $112^\circ$ ; Flótás— $140^\circ$	1 pont	
Érvénytelen szavazat (1,9%)— $7^\circ$	1 pont	
A kördiagramm vázlata	1 pont	<i>Az is megkapja ezt a pontot, aki megfelelt az érvénytelen szavazatokról</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>4. c)</b>		
A még nem összesített szavazatok száma: $7182 : 9 = 798$	1 pont	
Ha ez mind érvényes lenne, és például mindegyiket Alkimista kapná, akkor 2812 szavazattal megnyerhetné a választást	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4. d)</b>		
Ha $x$ a keresett százalék, akkor Flótás biztosan nyer, ha $0,95 \cdot \frac{x}{100} > 0,05$ ; tehát $x > \frac{5}{0,95} \approx 5,3$ .	3 pont	
Tehát ha Flótás 95%-os feldolgozottságnál legalább 5,3 %-kal vezet az öt követő jelölt előtt, akkor biztosan megnyeri a választást.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

## II.

<b>5. a)</b>		
András 20 perc, Béla 18,75 perc alatt teszi meg felfelé az utat, ezért a találkozáskor András lefelé, Béla felfelé fut.	3 pont	<i>A haladási irány grafikonról leolvasva is 3 pontot ér. Ha jól számol, de nem indokolja, hogy a találkozáskor ki merre fut, 2 pontot kaphat.</i>
A két fiú a csúcstól $x$ km-re találkozik. Ekkor András futási ideje órában: $\frac{1}{3} + \frac{x}{20}$ ,	2 pont	
Béla futási ideje órában: $\frac{5-x}{16}$ .	1 pont	
Mivel András 10 perccel korábban indult, ezért $\frac{1}{3} + \frac{x}{20} = \frac{5-x}{16} + \frac{1}{6}$ .	2 pont	
Innen $x = \frac{35}{27}$ km ( $\approx 1,3$ km). (A kapott érték a feladat feltételeinek megfelel.)	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	<i>Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe, hogy a két fiú nem egyszerre indul, akkor a feladat a) részére legfeljebb 5 pont adható. Ha a vizsgázó nem határozza meg a találkozás hegycsúcstól való távolságát, csak az időpontját, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.</i>

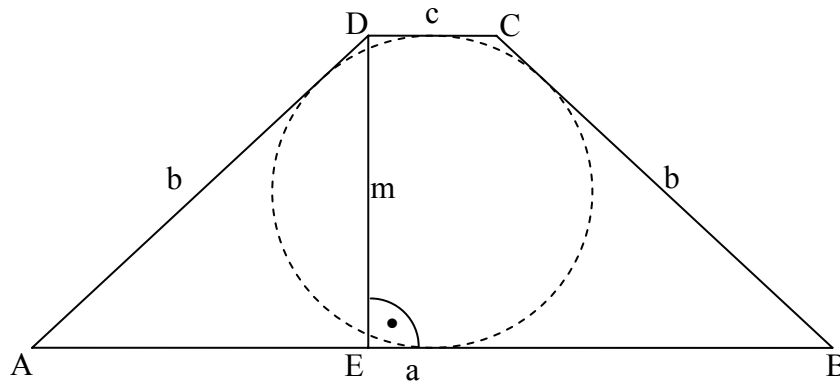
<b>5. b)</b>		
A feltétel csak úgy teljesülhet, hogy a lányok rendre 0, 1, 2, ..., 9 fiút ismernek.	2 pont	
A fiúk és a lányok közötti ismeretségek száma összesen $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ .	2 pont	
Ha a 9 fiú mindegyike 6 lányt ismert volna, az 54 ismeretséget jelentene. Az előbbieket szerint ez nem lehet.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	<i>Gráffal vagy számelméleti megfontolással indított, befejezhető jó próbálkozásért legfeljebb 3 pont adható.</i>

<b>6. a)</b>		
<p>Az <math>ABCD</math> trapézban <math>AB = 20</math>, <math>CD = 5</math>, és legyen a <math>D</math> csúsból induló magasság talppontja az <math>AB</math> oldalon <math>E</math>. Ezekkel a jelölésekkel:</p> $AE = \frac{AB - CD}{2} = \frac{15}{2}, \text{ ezért } EB = \frac{25}{2}.$	1 pont	<p><i>Ha <math>m</math>-et a c)-beli tételre helyesen hivatkozva adja meg, akkor is 3 pont jár.</i></p>
<p>A trapéz érintőnégszög, így <math>AD = \frac{AB + CD}{2} = \frac{25}{2}</math>.</p>	1 pont	
<p>(Pitagorasz tétele alapján)</p> $m = DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 10.$	1 pont	
$T = \frac{AB + CD}{2} \cdot m = 125.$	1 pont	
<p><math>BED</math> <math>\Delta</math>-ből:</p> $BD = \sqrt{DE^2 + EB^2} = \frac{5\sqrt{41}}{2} (\approx 16,01).$	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>5 pont</b>

<b>6. b)</b>		
<p>A kapott forgástest egy hengerből és két egybevágó forgáskúpból tevődik össze.</p>	1 pont	<p><i>Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, akkor ez a pont jár.</i></p>
<p>A henger és a kúpok alapkörének sugara <math>r = m = 10</math>.</p>	1 pont	
<p>A henger magassága <math>CD = 5</math>, a kúpok magassága</p> $AE = \frac{15}{2}.$	2 pont	
<p>Így a forgástest térfogata:</p> $V = 2 \cdot \frac{r^2 \pi \cdot AE}{3} + r^2 \pi \cdot CD = 1000\pi (\approx 3141,59).$	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>5 pont</b>

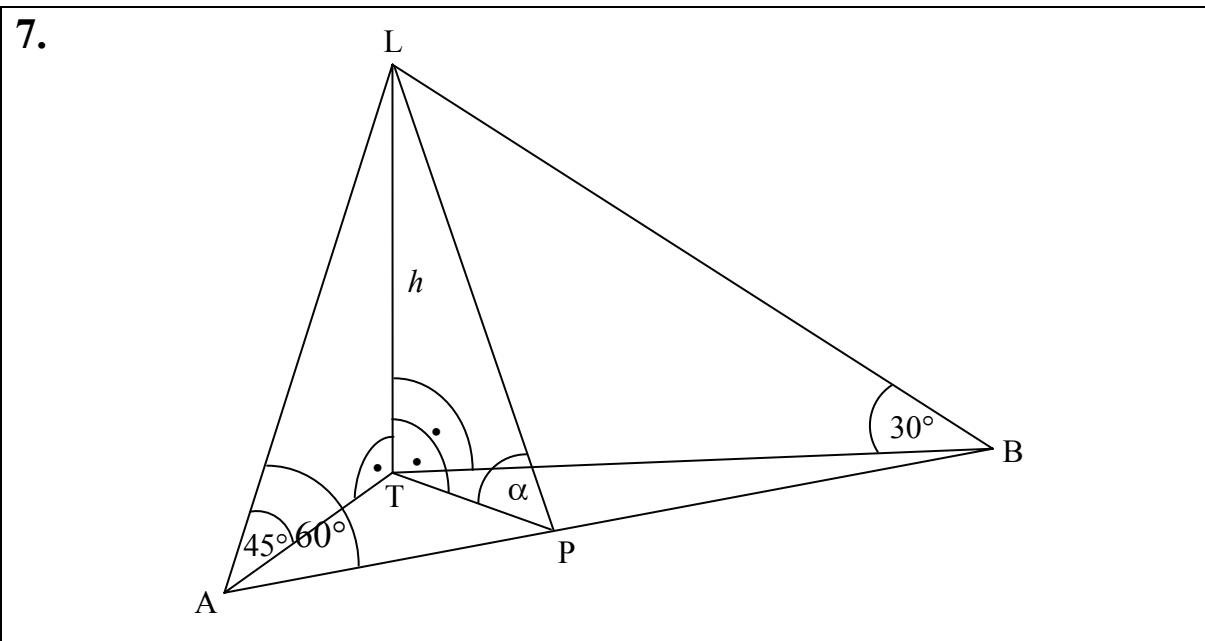


**6. c) első megoldás**



Ha a tekintett trapéz alapjainak hossza $a$ és $c$ ( $a \geq c$ ), szárának hossza $b$ , magasságának hossza $m$ , akkor azt kell belátni, hogy $m = \sqrt{ac}$ , vagy másképpen $m^2 = ac$ .	1 pont	
A trapéz érintőnéyszög, ezért $b = \frac{a+c}{2}$ .	1 pont	
Az ábra jelöléseit használva a szimmetria miatt $AE = \frac{a-c}{2}$ .	1 pont	
Pitagorasz tétele alapján $m^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 =$	1 pont	
$= ac$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

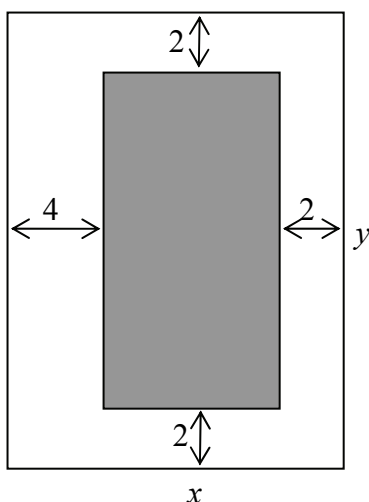
<b>6. c) második megoldás</b>		
<p>Jelölje <math>O</math> a beírt kör középpontját, <math>G</math> pedig a beírt körnek az <math>AD</math> oldallal vett érintési pontját. Ekkor a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt az ábra jelöléseit használva</p> $AG = AF_1 = \frac{a}{2} \text{ és } DG = DF_2 = \frac{c}{2}.$	1 pont	<p><i>Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, vagy ábrából látszik akkor ez a pont jár.</i></p>
<p>Mivel a trapéz szárán fekvő szögek összege <math>180^\circ</math>, és <math>O</math> a belső szögfelezők metszéspontja, ezért <math>DAO\angle + ODA\angle = 90^\circ</math>, tehát az <math>AOD</math> háromszög <math>O</math>-ban derékszögű,</p>	1 pont	
<p>és átfogóhoz tartozó magassága a kör sugara (<math>OG</math>),</p>	1 pont	
<p>ami a trapéz magasságának fele.</p>	1 pont	
<p>Felírva a magasságtételt az <math>AOD</math> háromszögre:</p>	1 pont	
$\frac{m}{2} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}} \Leftrightarrow m = \sqrt{ac}, \text{ és ezt akartuk bizonyítani.}$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	



<b>7. a)</b>		
Az $ATL$ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög,	1 pont	
így $AL = h\sqrt{2} (\approx 1191)$ .	1 pont	
A $BLT$ derékszögű háromszögben $BL = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2h (\approx 1684)$ .	2 pont	
Az $ABL$ háromszögben a koszinusztétel alapján $BL^2 = AL^2 + AB^2 - 2 \cdot AL \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$ ,	1 pont*	
$4h^2 = 2h^2 + AB^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot AB$ ,	1 pont*	<i>Ez a 2 pont az <math>AB^2 - 1191AB - 1417375 = 0</math> egyenletért is jár.</i>
$AB^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot AB - 2h^2 = 0$ .	1 pont*	
Mivel az $AB$ távolság, így pozitív, tehát $AB = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} h \approx 1927$ méter.	1 pont*	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	
* Ha az $ABL$ $\Delta$ -ben először a hiányzó szögeket számítja ki, az 1-1 pont ( $ABL\angle = 37,76^\circ$ ; $ALB\angle = 82,24^\circ$ ); majd koszinusz tételt ír fel jól, 1 pont; végeredményt ad 1 pont.		

<b>7. b)</b>		
A <i>PLT</i> derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{TP}$ .	2 pont	
Mivel $\alpha$ hegyesszög, és itt a tangens függvény szigorúan monoton növekvő, így elegendő a $\frac{h}{TP}$ törtet vizsgálni.	1 pont	
Mivel a számláló konstans, ezért a tört akkor a maximális, ha <i>TP</i> minimális.	1 pont	
Ez akkor következik be, amikor a <i>TP</i> merőleges az <i>AB</i> egyenesre, vagyis az <i>ABT</i> háromszög magassága, így a keresett pont az <i>ABT</i> háromszögnek a <i>T</i> csúcsába húzható magassága talppontja az <i>AB</i> egyenesen.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. c)</b>		
A feltétel szerint: $p_0 e^{C h} = 0,8 p_0$ .	1 pont	
$h = \frac{\log_e 0,8}{C} \left( = \frac{\lg 0,8}{C \lg e} \right)$ ,	1 pont	
$h \approx 1783$ (m) magasan volt a léggömb.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	



**8. a) első megoldás**

Legyen egy lap két szomszédos oldalának hossza $x, y$ .	1 pont	<i>Ha a felhasznált ismeretlenek jelentése ábra alapján egyértelmű, jár az 1 pont.</i>
$xy = 600, y = \frac{600}{x}$ . (1)	1 pont	
A nyomtatási terület: $A = (x - 6)(y - 4)$ , (2)	1 pont	
ahol $x > 6$ és $y > 4$ ; (azaz $x \in ]6;150[$ )	1 pont*	
Az (1)-et behelyettesítve a (2)-be: $A(x) = (x - 6)\left(\frac{600}{x} - 4\right)$ .	1 pont	
$A(x) = 624 - 4x - \frac{3600}{x}$	1 pont	
Meg kell keresnünk az $A(x)$ függvény maximumát. $A'(x) = -4 + \frac{3600}{x^2}$	1 pont	
$-4 + \frac{3600}{x^2} = 0$ .	1 pont	
Ennek az egyenletnek az alaphalmazba eső gyöke: $x = 30$ .	1 pont	<i>A *-gal jelzett 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó csak itt tisztázza az <math>x</math> változó értelmezési tartományát.</i>
A második derivált: $A''(x) = -2 \cdot \frac{3600}{x^3}$ .	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem határozza meg a második deriváltat, hanem az első derivált előjelváltásával indokol, akkor is jár a 2 pont.</i>
Mivel a második derivált minden pozitív helyen negatív, így $x = 30$ -nál is, tehát az $A$ függvénynek itt maximuma van.	1 pont	
Egy lap két oldala 30 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

<b>8. a) második megoldás</b>		
Legyen egy lap két szomszédos oldalának hossza $x, y$ .	1 pont	<i>Ha a felhasznált ismeretlenek jelentése ábra alapján egyértelmű, jár az 1 pont.</i>
A nyomtatási terület: $A = (x - 6)(y - 4)$ ,	1 pont	
ahol $x > 6$ és $y > 4$ .	1 pont*	
$A = xy - 4x - 6y + 24 = 624 - 2 \cdot (3y + 2x)$	1 pont	
Az $A$ értéke pontosan akkor maximális, ha a $3y + 2x$ értéke minimális.	1 pont	
A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával: $\frac{3y + 2x}{2} \geq \sqrt{3y \cdot 2x}$ ,	2 pont	<i>A *-gal jelzett 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó csak itt tisztázza az <math>x</math> és <math>y</math> változó értelmezési tartományát.</i>
ahol $xy=600$ felhasználásával $\frac{3y + 2x}{2} \geq \sqrt{6xy} = \sqrt{6 \cdot 600} = 60$ .	2 pont	
A jobb oldal minimumértéke 60 akkor, ha $3y = 2x$ .	1 pont	
Innen $xy=600$ felhasználásával $x = 30$ és $y = 20$ .	1 pont	
Egy lap két oldala 30 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>12 pont</b>	

<b>8. b)</b>		
A nyomtatott oldalakon 3-122-ig szerepelnek az oldalszámok,	1 pont	<i>A 2 pont jár, bárhogyan is határozza meg a vizsgázó a 2-est tartalmazó oldalak számát. Helyes válasz 1 pont, indoklás 1 pont.</i>
ezek közül 23-ban van 2-es számjegy.	1 pont	
A keresett valószínűség: $P = \frac{23}{120} (\approx 0,1917)$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>9. a)</b>		
9 szék közül 3 szék kiválasztására $\binom{9}{3}$ lehetőség van.	1 pont	
A 3 kiválasztott székre a professzorok $3! = 6$ különböző sorrendben ülhetnek le.	1 pont	
Így az összes lehetőségek száma: $\binom{9}{3} \cdot 6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	<i>A 4 pont akkor is jár, ha a vizsgázó indoklással együtt variációk száma-ként írja fel a helyes eredményt. Indoklás nélküli helyes eredményért 2 pont jár.</i>

<b>9. b)</b>		
A 6 hallgató között 5 hely van, ahová professzor ülhet. A 3 professzori hely $\binom{5}{3}$ , azaz 10-féle lehet.	2 pont	
A diákok egymáshoz viszonyítva $6! = 720$ ,	1 pont	
a professzorok $3! = 6$ különböző sorrendben ülhetnek.	1 pont	
Így az összes lehetőségek száma: $\binom{5}{3} \cdot 6! \cdot 3! = 43200.$	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>9. c)</b>		
A díjak kiosztása $9!$ -féleképpen történhet.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó a helyes eredményt valószínűségek szorzataként kapja meg <math>(\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84})</math>, a tényezők értelmezése 1-1 pont, a függetlenségre hivatkozás 1 pont.</i>
Az első és a harmadik díjazott is diák, ez $6 \cdot 5 = 30$ különböző módon valósulhat meg.	2 pont	
A tekintett két diák és a biológia professzor kivételével a többi díjazott $6!$ -féleképpen kaphatja meg a díjat.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség: $P = \frac{30 \cdot 6!}{9!} = \frac{5}{84} \approx 0,06.$	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	