ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2008. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2008. május 6. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Legyen a_1, a_2, …, a_{21} egy számtani sorozat első huszonegy tagja. Közülük a páratlan sorszámúak összege 15-tel nagyobb, mint a páros sorszámúak összege. Tudjuk továbbá, hogy $a_{20} = 3a_9$. Határozza meg az a_{15} értékét!

Ö.:	12 pont	

2. Egy nemzetközi matematikai felmérésben egy magyarországi középiskola 9−12. évfolyamából 100 diák vett részt. Minden diák ugyanazt a feladatlapot kapta, és a feladatlapon található feladatok teljes megoldásával maximálisan 150 pontot érhetett el. Az összes diák által elért pontszámok átlaga 100 pont volt. Másfélszer annyi 9−10. évfolyamos tanuló írta meg a felmérést, mint 11−12. évfolyamos tanuló, viszont a 11−12. évfolyamos tanulók átlagpontszáma másfélszer akkora volt, mint a 9−10. évfolyamos tanulóké.

***a*)** Számítsa ki a 11−12. évfolyamos tanulók átlagpontszámát!

A felmérést végző kutatóintézet kíváncsi volt a tanulók véleményére a feladatok nehézségét illetően. A 100 tanulóból véletlenszerűen választottak ki hármat, akiknek egy kérdőív kérdéseire kellett válaszolniuk.

***b*)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 9−10. évfolyamról 2 tanulót, a 11−12. évfolyamról 1 tanulót választottak ki?

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

3. Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$4 \cdot x^2 - 4(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot x + 1 + \sin\alpha = 0$$

egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke legyen!

Ö.:	13 pont	

4. Egy egyetem három karán összesen 10500 hallgató tanul. Diákrektort választanak. A jelöltek: Alkimista, Bagoly és Flótás. A választáson a hallgatók 76%-a vett részt. A szavazatok 90%-ának összesítése után a következő eredményekről tudósított a kollégium rádiósa: Alkimista szavazatainak száma 2014, Bagolyé 2229 és Flótásé 2805.

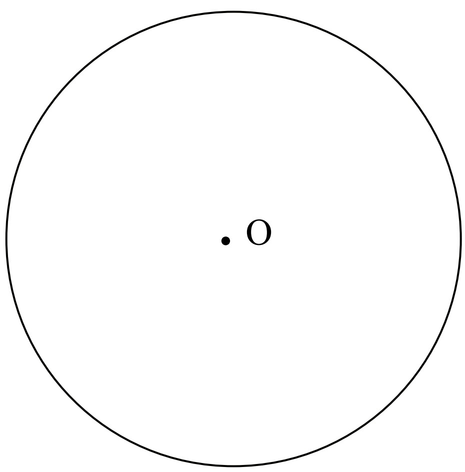
a) Az eddig feldolgozott szavazatoknak hány százaléka volt érvénytelen? (A választ egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)

b) Vázolja kördiagrammon az eddig feldolgozott szavazatok százalékos megoszlását! Tüntesse fel az egyes tartományokhoz tartozó középponti szögek nagyságát fokban mérve! (A megfelelő százalékokat és szögeket egész pontossággal adja meg!)

c) Megnyerheti-e Alkimista a választást? (A választást az nyeri, aki a legtöbb szavazatot kapja.)

d) 95%-os feldolgozottságnál legalább hány százalékkal vezessen Flótás az utána következő jelölt előtt, hogy már matematikailag is biztos lehessen a győzelemben? (A megfelelő legkisebb százalékot egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
d)	4 pont	
Ö.:	14 pont	



II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. András és Béla egy magaslati edzőtáborban minden reggel 10 km-t fut: 5 km-t hegynek felfelé a hegycsúcsig, majd megállás nélkül 5 km-t ugyanazon az úton vissza a táborig. Egyik nap András reggel 10 perccel hamarabb indult Bélánál, és felfelé 15 km/h, lefelé 20 km/h sebességgel futott. Béla sebessége ezen a reggelen felfelé 16 km/h, lefelé 22 km/h volt.

a) Futás közben a hegycsúcstól milyen távol találkoztak egymással ezen a reggelen?

Az edzőtáborba összesen 10 lány és 9 fiú érkezett meg. Az első foglalkozáson az edző mindenkit megkérdezett, hogy hány társát ismerte korábbról a csoportból. (Az ismeretség kölcsönös.) Tudjuk, hogy korábbról mindegyik fiú pontosan ugyanannyi lányt ismert, viszont a lányok mindannyian különböző számú fiút ismertek.

b) Lehet-e, hogy minden fiú 6 lány ismert korábbról a tábor kezdetekor?

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 5, illetve 20 egység.

a) Számítsa ki a trapéz területét és átlójának hosszát!

b) Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy a trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja körül.

c) Bizonyítsa be általánosan a következő állítást:
Ha egy húrtrapéz érintőnégyszög, akkor magasságának hossza az alapok hosszának mértani közepe.

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

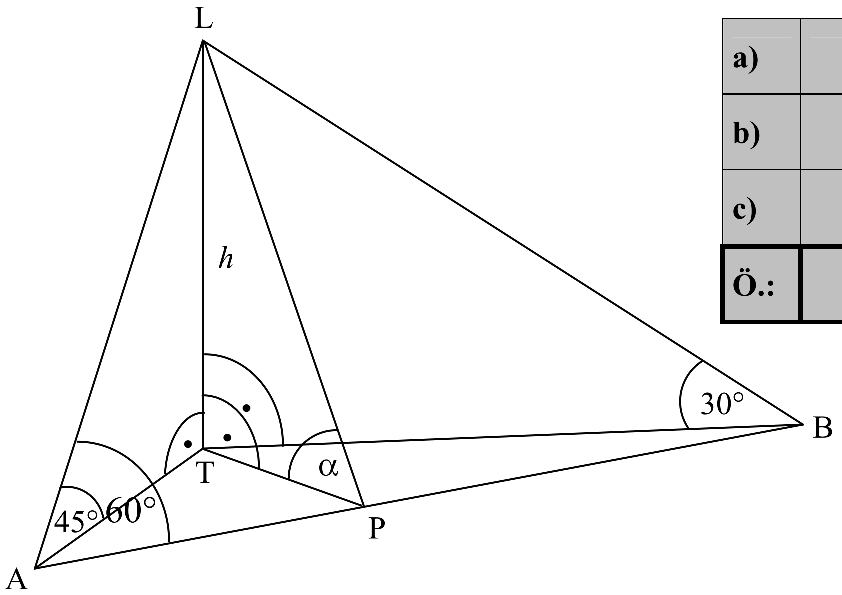
Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. A tengerparton néhány perccel 12 óra előtt felbocsátottak egy meteorológiai léggömböt, ami a tenger felé sodródva emelkedett. A léggömbön a magasságmérő 842 métert jelzett, amikor Aladár és Béla a tengerparton szögmérő műszerekkel bemérte a léggömb helyzetét pontban 12 órakor. Aladár azt állapította meg, hogy a léggömb 45°-os emelkedési szögben (a vízszintes síkkal bezárt szög) látszik, a léggömb és Béla helyét összekötő szakasz látószöge pedig 60°-os. Béla a léggömböt 30°-os emelkedési szögben látta.

a) Milyen messze volt egymástól a két szögmérő műszer?

b) Az Aladár és Béla helyét összekötő szakaszon lévő pontok közül a P pontból láthatták volna maximális emelkedési szögben a léggömböt 12 órakor. Igazolja, hogy P az ABT háromszög T-re illeszkedő magasságának talppontja!

c) Milyen magasan volt a léggömb 12 óra 30 perckor, amikor a léggömbön lévő légnyomásmérő műszer a tengerszinten lévő légnyomás 80%-át mutatta?
A légnyomás a tengerszint feletti magasság függvényében a $p(h) = p_0 e^{Ch}$ képlet alapján számolható, ahol h a méterben mért tengerszint feletti magasságot, p_0 a tengerszinten lévő légnyomást (ezt tekinthetjük 10^5 Pascalnak), e a természetes logaritmus alapszámát ($e \approx 2{,}718$), C egy tapasztalati konstanst jelent ($C = -\frac{1}{7992}$).



a)	8 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélen a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe 600 cm^2.

a) Mekkorák legyenek a lap méretei, ha a szerkesztő a lehető legnagyobb nyomtatási területet szeretné elérni a lapokon?

b) A nyomtatott oldalak száma 120, és a nyomtatott oldalak számozása 3-mal kezdődik.
Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy nyomtatott oldalt, mekkora valószínűséggel lesz az oldalszámban 2-es számjegy?

a)	12 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy egyetem természettudományi karának tanévzáró ünnepségén 6 doktorandusz hallgató, valamint egy biológia professzor, egy fizika professzor és egy matematika professzor kapott díjat kimagasló kutatói tevékenységéért. Számukra az első sorban helyeztek el 9 széket. Az ünnepségre a professzorok együtt érkeztek, megelőzve a hallgatókat.

a) Hányféleképpen foglalhatnának helyet a professzorok a 9 üres széken, ha nem várnák meg a hallgatókat?

A professzorok azonban megvárták a hallgatókat. Mikor a hallgatók mindegyike megérkezett az ünnepségre, a professzorok azt kérték, hogy mindegyikük két hallgató között ülhessen. A hallgatók örömmel tettek eleget a kérésnek.

b) Hányféleképpen ülhetett le így a 9 díjazott?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a biológia professzor másodikként veheti át a díjat úgy, hogy közvetlenül előtte is, utána is doktorandusz hallgatót szólítanak a díj átvételére, és az ünnepségen a díjak átadásánál minden egyes sorrend egyenlő valószínűséggel valósul meg?

a)	4 pont	
b)	6 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
			MINDÖSSZESEN	**115**	

dátum

javító tanár

---

	elért pontszám	programba beírt pontszám
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző