

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. május 6.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS  
MINISZTERIUM**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

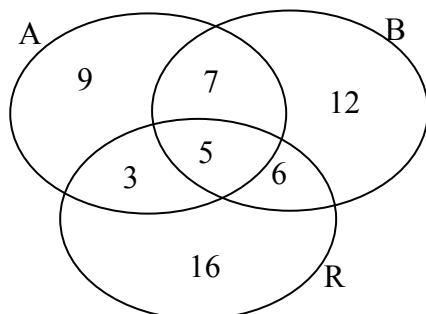
1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

**I.**

**1. a) első megoldás**



(A halmazokat a lányok nevének kezdőbetűjével jelöltük.)

Készítsünk halmazábrát! A halmazok elemei legyenek az egyes lányok által megtalált hibák.	1 pont	<i>A pont a modell helyes alkalmazásáért jár.</i>
Minden jó érték 1-1- pont	7 pont	<i>Ha a 7, 3 és 6 helyett rendre 12-öt, 8-at és 11-et ír, legfeljebb 1 pontot kaphat a 7 pontból. Számolási hiba esetén hibánként 1-1 pontot vonjunk le.</i>
A felfedezett hibák számát a részhalmazokba írt elemszámok összege adja: (9 + 7 + 12 + 3 + 5 + 6 + 16) Tehát a három lány összesen 58 hibát fedezett fel.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

**1. b) első megoldás**

Legalább ketten vették észre a hibát, ha pontosan ketten vagy pontosan hárman észlelték azt.	1 pont	<i>Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.</i>
Az első csoportba 7 + 6 + 3; a másodikba 5 hiba tartozott. Legalább ketten észlelték a hibát 21 alkalommal.	2 pont	
Ez az összes észlelt hiba $\frac{21}{58} \approx 0,36$ -ad része, azaz kb. 36%-a.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>1. a) második megoldás</b>		
(Jelöljük a lányok nevének kezdőbetűjével az egyes lányok által megtalált hibák halmazát!) A szöveg alapján: $ A  = 24$ ; $ B  = 30$ ; $ R  = 30$ ; $ A \cap B  = 12$ ; $ A \cap R  = 8$ ; $ B \cap R  = 11$ ,	1 pont	
valamint $ A \cap B \cap R  = 5$ .	1 pont	
A három lány által megtalált hibák száma az $A \cup B \cup R$ halmaz elemszáma.	2 pont	<i>Ez a pont nem bontható. Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.</i>
A logikai szita formulát alkalmazva: $ A \cup B \cup R  =$ $ A  +  B  +  R  -  A \cap B  -  A \cap R  -  B \cap R  +  A \cap B \cap R  =$	2 pont	<i>A formula felírása általános esetre 1 pontot ér.</i>
$= 24 + 30 + 30 - 12 - 8 - 11 + 5 = 58$ .	2 pont	<i>Számolási hiba esetén 1 pontot kap.</i>
A három lány összesen 58 hibát észlelt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

<b>1. b) második megoldás</b>		
Legalább ketten vették észre a hibát, ha pontosan ketten vagy pontosan hárman észlelték azt.	1 pont	<i>Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.</i>
Ezért a hibák száma: $ A \cap B  +  A \cap R  +  B \cap R  - 2 \cdot  A \cap B \cap R  =$ $12 + 8 + 11 - 2 \cdot 5 = 21$ .	2 pont	
A keresett százalék tehát $\frac{21}{58} \cdot 100 \approx 36\%$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>2. első megoldás</b>		
Megoldást csakis az $x^2 \geq 3$ feltételnél kereshetjük.	1 pont	
Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát! $x^2 + 1 + 2\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} + x^2 - 3 = 4.$	2 pont	<i>Helyesen alkalmazza a kéttagú összeg négyzetre emelését 1 pont, ezt jól alkalmazza a négyzetgyökös kifejezésekre 1 pont.</i>
Rendezés után kaphatjuk, hogy $2 \cdot \sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} = 6 - 2x^2$ (azaz $\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} = 3 - x^2$ ).	2 pont	<i>Tudja, hogy a négyzetgyökös kifejezésre célszerű rendezni 1 pont, ezt helyesen elvégzi 1 pont.</i>
A baloldali kifejezés nemnegatív értékű, így a jobboldali kifejezés is nemnegatív,	1 pont	
ezért $x^2 \leq 3$ feltételnek is fenn kell állnia.	1 pont	
A kezdeti feltétellel összevetve, az $x^2 = 3$ teljesülhet csak.	1 pont	
Ezt az értéket az eredeti egyenletbe behelyettesítve adódik, hogy az $x^2 = 3$ kielégíti az egyenletet.	1 pont	
Innen a két gyök: $x_1 = \sqrt{3}$ és $x_2 = -\sqrt{3}$ . ( $M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ )	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont*</b>	

<b>2. második megoldás</b>		
Mind a két oldalból kivonva a $\sqrt{x^2 + 1}$ kifejezést, emeljük négyzetre a kapott egyenlet mindkét oldalát!	1 pont	
Ekkor az $x^2 - 3 = 4 - 4\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1$ egyenlethez juthatunk.	2 pont	<i>Az egyenlet két oldalának helyes felírása 1-1 pont.</i>
Rendezve kapjuk, hogy $4 \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 8$ (azaz $\sqrt{x^2 + 1} = 2$ ).	2 pont	<i>Tudja, hogy a négyzetgyökös kifejezésre célszerű rendezni 1 pont, ezt helyesen elvégzi 1 pont.</i>
Négyzetre emelve és rendezve az $x^2 = 3$ egyenlethez jutunk;	2 pont	
és innen $x_1 = \sqrt{3}$ és $x_2 = -\sqrt{3}$ . ( $M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ ).	1 pont	
Behelyettesítéssel adódik, hogy mind a két érték kielégíti az eredeti egyenletet.	2 pont	<i>Ez a pont nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont*</b>	

<b>2. harmadik megoldás</b>		
A megoldás csak olyan $x$ szám lehet, amelyre $x^2 \geq 3$ teljesül.	1 pont	
Vonjuk ki mindkét oldalból a $\sqrt{x^2 + 1}$ kifejezést! $\sqrt{x^2 - 3} = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$	1 pont	
A kapott egyenlet bal oldalán álló kifejezés értéke nemnegatív, így csak olyan $x$ szám lehet a megoldás, amelyre a jobb oldal értéke is nemnegatív.	1 pont	
Tehát $2 - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$ , azaz $2 \geq \sqrt{x^2 + 1}$ .	1 pont	
Az utóbbi egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve a $4 \geq x^2 + 1$ , azaz $3 \geq x^2$ egyenlőtlenséghez jutunk.	2 pont*	<i>Négyzetre emelés 1 pont, rendezés 1 pont.</i>
A négyzetre emeléssel a reláció jel nem változott, mert az $2 \geq \sqrt{x^2 + 1}$ egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív értékű, és a négyzetfüggvény a nemnegatív számok halmazán szigorúan növekvő.	2 pont*	<i>Helyes megállapításonként 1-1 pont.</i>
A kezdeti $x^2 \geq 3$ és a kapott $3 \geq x^2$ egyenlőtlenségek csak akkor teljesülhetnek, ha $x^2 = 3$ .	1 pont*	
Innen a két gyök: $x_1 = \sqrt{3}$ és $x_2 = -\sqrt{3}$ . $M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$	1 pont	
<b>Összesen: 10 pont*</b>		
<p>A *-gal jelölt pontok az alábbi megoldása esetén a következőképpen adhatók:</p> <p>Mivel <math>x^2 \geq 3</math>, ezért <math>x^2 + 1 \geq 4</math>. (1 pont)</p> <p>A négyzetgyökfüggvény a nemnegatív számok halmazán szigorúan növekvő, (1 pont)</p> <p>így <math>\sqrt{x^2 + 1} \geq 2</math> lehet csak. (1 pont)</p> <p>Az <math>2 \geq \sqrt{x^2 + 1}</math> és a kapott <math>\sqrt{x^2 + 1} \geq 2</math> egyenlőtlenségek egyszerre csak akkor teljesülhetnek, ha <math>\sqrt{x^2 + 1} = 2</math>, azaz <math>x^2 = 3</math>. (2 pont)</p>		

<b>2. negyedik megoldás</b>		
Megoldást csakis az $x^2 \geq 3$ feltételnél kereshetjük.	1 pont	
Ha $x^2 = 3$ , akkor a $\sqrt{4} + \sqrt{0} = 2$ igaz kijelentést kapjuk.	2 pont	
Tehát a $\sqrt{3}$ és a $-\sqrt{3}$ is megoldás.	1 pont	
Ha $x^2 > 3$ , akkor $\sqrt{x^2 + 1} > 2$ és $\sqrt{x^2 - 3} > 0$ ,	2 pont	<i>A következtetéssel adódó helyes egyenlőtlenségek felírása: 1-1 pont</i>
így $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3} > 2$ ,	2 pont	
vagyis ekkor nem kapunk megoldást.	1 pont	
Az egyenlet megoldáshalmaza tehát: $M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont*</b>	

\*: A 10 pontból legfeljebb 8-at kaphat, aki csak az egyik gyököt találja meg.

<b>3. a)</b>																																																																										
Ha az $5 \times 5$ -ös táblázatban összeadjuk a <i>k.</i> <b>oszlopban</b> lévő számokat, akkor megkapjuk, hogy hány irodában adtak el <i>k</i> darab <b>autóbuszos</b> utat.	1 pont	<i>Ha a gondolatokat jól használja, ezeket a pontokat kapja meg.</i>																																																																								
Ha a táblázat <i>n.</i> <b>sorában</b> lévő számokat adjuk össze, akkor megkapjuk, hogy hány irodában adtak el <i>n</i> darab <b>repülős</b> utat.	1 pont																																																																									
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="6">A típusú eladott utak száma</th> <th rowspan="2">összeg</th> <th rowspan="2">utak száma</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="7" style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">R típusú eladott utak száma</th> <th>0</th> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td><b>5</b></td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>1</th> <td>1</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>1</td> <td><b>9</b></td> <td>9</td> </tr> <tr> <th>2</th> <td>1</td> <td>5</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>3</td> <td><b>15</b></td> <td><math>15 \cdot 2 = 30</math></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td>0</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>9</td> <td>2</td> <td><b>15</b></td> <td><math>15 \cdot 3 = 45</math></td> </tr> <tr> <th>4</th> <td>1</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>2</td> <td><b>11</b></td> <td><math>11 \cdot 4 = 44</math></td> </tr> <tr> <th>összeg</th> <td><b>4</b></td> <td><b>14</b></td> <td><b>8</b></td> <td><b>19</b></td> <td><b>10</b></td> <td>(55)</td> <td><b>128</b></td> </tr> <tr> <th>utak száma</th> <td>0</td> <td>14</td> <td>16</td> <td>57</td> <td>40</td> <td><b>127</b></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>					A típusú eladott utak száma						összeg	utak száma	0	1	2	3	4	R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2	<b>5</b>	0	1	1	2	2	3	1	<b>9</b>	9	2	1	5	2	4	3	<b>15</b>	$15 \cdot 2 = 30$	3	0	3	1	9	2	<b>15</b>	$15 \cdot 3 = 45$	4	1	3	3	2	2	<b>11</b>	$11 \cdot 4 = 44$	összeg	<b>4</b>	<b>14</b>	<b>8</b>	<b>19</b>	<b>10</b>	(55)	<b>128</b>	utak száma	0	14	16	57	40	<b>127</b>	
		A típusú eladott utak száma						összeg	utak száma																																																																	
		0	1	2	3	4																																																																				
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2	<b>5</b>	0																																																																		
	1	1	2	2	3	1	<b>9</b>	9																																																																		
	2	1	5	2	4	3	<b>15</b>	$15 \cdot 2 = 30$																																																																		
	3	0	3	1	9	2	<b>15</b>	$15 \cdot 3 = 45$																																																																		
	4	1	3	3	2	2	<b>11</b>	$11 \cdot 4 = 44$																																																																		
	összeg	<b>4</b>	<b>14</b>	<b>8</b>	<b>19</b>	<b>10</b>	(55)	<b>128</b>																																																																		
	utak száma	0	14	16	57	40	<b>127</b>																																																																			
A táblázat számított adatainak helyes megállapítása	3 pont	<i>Ha a táblázat kiszámolt értékei közt hibák vannak, akkor 1-2 hiba esetén 2 pont, 3-4 hiba esetén 1 pont jár.</i>																																																																								
Az autóbuszos utak száma: $(14+16+57+40=)127$ ;	1 pont																																																																									
a repülős utak száma: $(9+30+45+44=)128$ .	1 pont																																																																									
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>																																																																									



<b>3. b)</b>		
5-nél több utat az az iroda adott el, amelyekben hat, hét vagy nyolc az eladott utak száma.	1 pont	<i>Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.</i>
<u>Hat utat</u> adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak $(k ; n)$ összege 6. Ez három esetben lehetséges: $k + n = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2$ .	1 pont	
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma pedig $3 + 9 + 3 = 15$ .	1 pont	
<u>Hét utat</u> adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak $(k ; n)$ összege 7. Ez két esetben lehetséges: $k + n = 3 + 4 = 4 + 3$ .	1 pont	
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma pedig $2 + 2 = 4$ .	1 pont	
<u>Nyolc utat</u> adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak $(k ; n)$ összege 8. Ez egyetlen esetben lehetséges: $k + n = 4 + 4$ . Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma pedig 2.	1 pont	
Mivel 55 fiókiroda volt, és közülük ötnél több utat $(15 + 4 + 2 =)21$ -ben adtak el, a keresett valószínűség: $\frac{21}{55} (\approx 0,3818)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	<i>Számolási hiba esetén összesen 1 pontot vonjunk le.</i>

**3. b) megoldásának másik leírása**

		A típusú eladott utak száma				
		0	1	2	3	4
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2
	1	1	2	2	3	1
	2	1	5	2	4	3*
	3	0	3	1	9*	2**
	4	1	3	3*	2**	2***

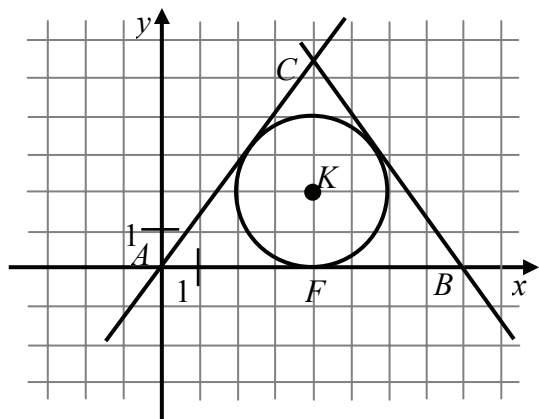
Mivel egyik fiókiroda sem adott el 4-nél többet egyik típusú útból sem, ezért 5-nél több utat az az iroda adott el, amelyikben hat, hét vagy nyolc az eladott utak száma.	1 pont	<i>Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.</i>
A táblázat adatai szerint összesen <u>hat</u> utat a táblázatban *-gal megjelölt számú fiókirodákban adtak el,	1 pont	
tehát összesen $3 + 9 + 3 = 15$ irodában.	1 pont	
<u>Hét</u> utat a **-gal megjelölt számú fiókirodákban adtak el,	1 pont	
összesen $2 + 2 = 4$ irodában.	1 pont	
<u>Nyolc</u> utat pedig a ***-gal megjelölt számú fiókirodákban, azaz összesen 2 irodában.	1 pont	
Ötnél több utat tehát $15 + 4 + 2 = 21$ fiókirodában adtak el, és mivel 55 fiókiroda volt, a keresett valószínűség: $\frac{21}{55} (\approx 0,3818)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	<i>Számolási hiba esetén összesen 1 pontot vonjunk le.</i>

*Kevésbé részletes indoklás esetén is adjuk meg a vonatkozó pontszámot mind az a) mind a b) kérdésre adott megoldásnál, ha a vizsgázó gondolatmenete követhető. Pl. a b) kérdésben a táblázatban bekarikázta a hat darab megfelelő számot, és azok összegével adta meg a kedvező esetek számát.*

<b>4.</b>		
Jelöljük $z$ -vel az urnában lévő zöld golyók, $k$ -val a kék golyók számát.	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha a gondolat csak az egyenletek felírásában jelenik meg.</i>
Ekkor az urnában lévő golyók száma: $18 + z + k$ .	1 pont	
Használjuk a valószínűség kombinatorikus kiszámítását megadó $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ képletet!	1 pont	
A feltételek szerint		
(1) $\frac{z+k}{18+z+k} + \frac{1}{15} = \frac{18+z}{18+z+k}$	1 pont	
(2) $\frac{k+18}{18+z+k} = \frac{1,1(z+18)}{18+z+k}$ .	1 pont	
Az (1)-es egyenlet törtmentes alakja: $15 \cdot (z+k) + 18 + z + k = 15 \cdot (18+z)$ ,	1 pont	
innen rendezés után kapjuk: (3) $16k + z = 252$ .	1 pont	
Az (2)-es egyenlet törtmentes alakja: $k+18 = 1,1 \cdot (z+18)$ ,	1 pont	
innen rendezés után kapjuk: (4) $k = 1,1z + 1,8$ .	1 pont	
A (4)-es egyenlőségből $k$ értékét a (3)-as egyenletbe írva $16 \cdot (1,1z + 1,8) + z = 252$ ,	1 pont	
innen $z = 12$ .	1 pont	
A (4) egyenlőségből kapjuk, hogy $k = 15$ .	1 pont	
A kapott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek.	1 pont	
Az urnában 12 darab zöld és 15 darab kék golyó volt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>14 pont</b>	

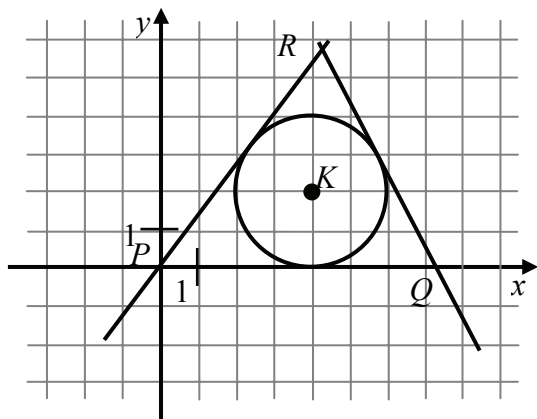
**II.**

**5. a)**



A keresett háromszög egyik csúcsa a koordinátarendszer origója. A háromszög beírt körének középpontja $K(4 ; 2)$ . (A belső szögfelezők metszéspontja).	1 pont	
Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye áthalad ezen a középponton.	1 pont	
Ha az $ABC$ háromszög alapjának egyenese az $x$ tengely, akkor a szimmetriatengelyének az egyenlete $x = 4$ .	1 pont	
Mivel $A(0;0)$ , és az $AB$ oldalél $F$ felezőpontja $(4 ; 0)$ , ezért a $B$ koordinátái $(8 ; 0)$ .	1 pont	
A $C$ csúcs az $AC$ oldalegyenes $\left(y = \frac{4}{3}x\right)$ és a szimmetriatengely $(x = 4)$ metszéspontja. $C\left(4 ; \frac{16}{3}\right)$ .	1 pont	
A $BC$ oldalegyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{BC}\left(-4 ; \frac{16}{3}\right)$ ,	1 pont	
így a $BC$ egyenes egyenlete: $4x + 3y = 32$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	
<p><i>Az utolsó három pont elosztása az irányítványozás egyenlet felírása esetén:</i></p> <p><i>A <math>B</math> ponton átmenő érintő iránytangense <math>-\frac{4}{3}</math> (1 pont),</i></p> <p><i>mivel irányszöge a megadott egyenes irányszögének ellentettje, vagy kiegészítő szöge, (1 pont)</i></p> <p><i>tehát a <math>BC</math> oldal egyenesének egyenlete: <math>y = -\frac{4}{3}(x - 8)</math>. (1 pont)</i></p>		

**5. b) első megoldás**



<p>Ha <math>P(0;0)</math>, és a <math>PQR</math> háromszög alapjának egyenese a <math>QR</math> egyenes, akkor a <math>\overrightarrow{PK}</math> vektor a <math>QR</math> egyenes egy normálvektora. <math>\overrightarrow{PK} = (4; 2)</math>. <math>QR</math> egyenes egyenlete: <math>2x + y = c</math>; ahol <math>c</math> valamilyen valós szám.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>A megadott kör akkor lesz a <math>PQR</math> háromszög beírt köre, ha a <math>QR</math> egyenes érinti a kört. Vagyis a körnek és az egyenesnek egyetlen közös pontja van. Tehát az a <math>c</math> érték felelhet meg, amelyre az alábbi egyenletrendszernek egyetlen gyöke lesz:</p> $\left. \begin{array}{l} 2x + y = c \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{array} \right\}$	<p>1 pont</p>	
<p>Az első egyenletből <math>y</math>-t kifejezve (<math>y = c - 2x</math>), és a másodikba behelyettesítve rendezés után kapjuk, hogy</p> $5x^2 - 4cx + c^2 - 4c + 16 = 0.$	<p>3 pont</p>	<p><i>A háromtagú kifejezés négyzetre emelésének helyes elvégzése 2 pont (ez nem bontható), helyes összevonás 1 pont.</i></p>
<p>Egyetlen gyököt pontosan akkor kapunk, ha ennek az egyenletnek a diszkriminánsa (<math>D</math>) nulla,</p> $D = -4c^2 + 80c - 320.$	<p>1 pont</p>	<p><i>A pont a diszkrimináns helyes felírásáért jár.</i></p>
<p>Megoldandó tehát a <math>c^2 - 20c + 80 = 0</math> egyenlet. Ebből:</p> $c_1 = 10 + \sqrt{20} \text{ és } c_2 = 10 - \sqrt{20}.$	<p>1 pont</p>	
<p>A <math>c_2</math> értéke nem felel meg, mert ekkor a kör a háromszög kívülről érintő köre lenne.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>A keresett <math>QR</math> egyenes egyenlete:</p> $2x + y = 10 + \sqrt{20}.$	<p>1 pont</p>	
<p><b>Összesen:</b></p>	<p><b>9 pont</b></p>	

<b>5. b) második megoldás</b>		
Ha $P(0;0)$ , és a $PQR$ háromszög alapjának egyenese a $QR$ egyenes, akkor a háromszög szimmetriatengelye a $PK$ egyenes, amelynek egyik irányvektora a $\overrightarrow{PK} (4; 2)$ , egyenlete $x - 2y = 0$ .	1 pont	
A háromszög beírt körének és a szimmetria tengelyének metszéspontja a $QR$ oldal $G$ felezőpontja. $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x-2y = 0 \end{cases}$	1 pont	
Behelyettesítő módszert alkalmazva az $5x^2 - 40x + 64 = 0$ (vagy az $5y^2 - 20y + 16 = 0$ ) egyenlethez jutunk.	2 pont	<i>A kéttagú kifejezés négyzetre emelésének helyes elvégzése 1 pont, helyes összevonás 1 pont.</i>
Ennek megoldásai: $x_1 = 4 + \frac{2\sqrt{20}}{5}$ és $x_2 = 4 - \frac{2\sqrt{20}}{5}$ . (Vagy $y_1 = 2 + \frac{\sqrt{20}}{5}$ és $y_2 = 2 - \frac{\sqrt{20}}{5}$ )	1 pont	
Mivel a $G$ pont első koordinátája 4-nél nagyobb,	1 pont	
így $G \left( 4 + \frac{2\sqrt{20}}{5}; 2 + \frac{\sqrt{20}}{5} \right)$ .	1 pont	
A $QR$ egyenes merőleges a $PK$ egyenesre, és áthalad a $G$ ponton, így egyik normálvektora $\underline{n} (2; 1)$ .	1 pont	
A $QR$ egyenes egyenlete: $2x + y = 8 + \frac{4\sqrt{20}}{5} + 2 + \frac{\sqrt{20}}{5}$ , azaz $2x + y = 10 + \sqrt{20}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	
<i>Az egyenes egyenletének bármely alakja elfogadható: pl.: <math>y = -2 \left( x - 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) + 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}</math>.</i>		

<b>6. a)</b>		
A differenciálható $f$ függvénynek az $x = 1$ akkor lehet szélsőérték-helye, ha itt az első deriváltja nulla.	1 pont	<i>Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.</i>
Mivel $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 9$ ;	1 pont	
ezért $f'(1) = 3 + 2k + 9 = 0$ .	1 pont	
innen $k = -6$ .	1 pont	
A lehetséges $k$ értékre $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ .	1 pont	
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$ .	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor jár, ha a vizsgázó a másodfokú függvény előjelviszonyait megindokolva vizsgálja.</i>
Az $x = 1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált,	1 pont	<i>A szöveges indoklást egy helyesen kitöltött táblázat helyettesítheti.</i>
ezért itt az $f$ függvénynek lokális maximuma van.	1 pont	
A derivált az $x = 3$ helyen negatívból pozitívba vált,	1 pont	
ezért itt az $f$ függvénynek lokális szélsőértéke (minimuma) van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	

<b>6. b)</b>		
Mivel $g'(x) = 3x^2 - 18x$ ,	1 pont	
ebből $g''(x) = 6x - 18$ .	1 pont	
A második derivált zérushelye az $x = 3$ .	1 pont	
Itt a második derivált előjelet vált.	1 pont	
A $g$ függvény (egyetlen) inflexiós pontja az $x = 3$ .	1 pont	<i>Válaszként a <math>(3 ; -54)</math> pont megadása is elfogadható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. a) első megoldás</b>		
A 41 főből álló társaság ismeretségi számát megkaphatjuk, ha összeadjuk Anna ismerőseinek és Anna 40 ismerőse egymás közti ismeretségeinek számát.	1 pont	<i>Ha a gondolatot jól használja, ezt a pontot kapja meg.</i>
Anna ismeri a 40 ismerősét.	1 pont	
Anna 40 ismerősének mindegyike 38 embert ismer Annán kívül.	1 pont	
Így Anna 40 ismerősének $\frac{40 \cdot 38}{2} = 760$ ismeretsége van egymás közt.	1 pont	
A 41 fő között $40 + 760 = 800$ ismeretség van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. a) második megoldás</b>		
Jelöljük egy gráffal az ismeretségeket. Ekkor egy 41 pontú gráfunk lesz, ahol minden pont fokszámát ismerjük, hiszen Anna mind a 40-et ismeri, az ő fokszáma 40, a többiek pontosan 39-et, mert Annát mind ismerik és pontosan egyet nem a többi 39-ből.	2 pont	<i>A jó modell 2 pont.</i>
Azaz a fokszám tétel alapján	1 pont	
$2e = 40 + 39 \cdot 40 = 1600,$	1 pont	
tehát 800 ismeretség van köztük.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. a) harmadik megoldás</b>		
Ha mindenki mindenkit ismerne, akkor az ismeretségek száma $\frac{41 \cdot 40}{2}$ lenne.	2 pont	
40 személy kettesével (egyértelműen) párba állítható úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismeri egymást, ezért 20 egymást nem ismerő pár van,	2 pont	
tehát $\frac{41 \cdot 40}{2} - 20 = 800$ ismeretség van.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	



<b>7. b) első megoldás</b>		
Vannak 40-en akiből választunk (és bármelyik pár kiválasztásának valószínűsége ugyanakkora).	1 pont	
Az elsőnek választott személy bárki lehet, hiszen mindenki pontosan egyet nem ismer (szimmetrikus a szerepük).	1 pont	
Utána 39-ből kell választani egyet (összes esetek száma).	1 pont	
Mivel az elsőnek választott személy közülük egyet nem ismer, így 38-at ismer (kedvező esetek száma).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy ismerik egymást: $\frac{38}{39}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. b) második megoldás</b>		
Képzeljük el Anna 40 ismerősenek ismeretségi gráfját. A 40 pontú gráf két pontját akkor kötjük össze, ha a két ember ismeri egymást. Kiszámoljuk, hogy hány éle van a gráfnak.	2 pont	<i>A jó modell 2 pont.</i>
Ha a 40 ember mindegyike ismerné az összes többi embert, a 40 pontú gráfnak $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ éle lenne.	1 pont	
A feltétel szerinti gráf éleinek száma $\frac{40 \cdot 38}{2} = 760$ .	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{760}{780} = \frac{38}{39} (\approx 0,9744)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>7. c) első megoldás</b>		
A kiválasztott két személy közül vagy Anna az egyik, vagy mindkettő Anna ismerősei közül való.	1 pont	<i>Ha a gondolatot jól használja, ezt a pontot kapja meg.</i>
1. eset: Ha Anna az egyik kiválasztott. Ekkor a másik kiválasztásától függetlenül a két ember ismeri egymást. A kedvező esetek száma ekkor nulla.	1 pont	
2. eset: Ha Anna ismerősei közül való a két kiválasztott. Akkor a 40 személy kettesével (egyértelműen) párba állítható úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismeri egymást, ezért 20 „kedvező” pár van.	1 pont	
Az összes lehetséges kiválasztások száma $\binom{41}{2}$ ,	1 pont	
azaz 820.	1 pont	<i>Ez a pont jár akkor is, ha a valószínűség meghatározása során számítja ki helyesen.</i>
Így a kérdéses valószínűség: $\left(\frac{0+20}{820} =\right) \frac{20}{820}$ , azaz $\frac{1}{41}$ ( $\approx 0,0244$ ).	1 pont	<i>Itt a hányados képzéséért jár a pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>7. c) második megoldás</b>		
Ha Anna az egyik kiválasztott, akkor a másik kiválasztásától függetlenül a két ember ismeri egymást. Így ekkor annak a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást nulla.	1 pont	<i>Ha a gondolatot jól használja, ezt a pontot kapja meg.</i>
Ha Annát nem választjuk ki elsőre, annak $\frac{40}{41}$ ,	1 pont	
annak, hogy másodszorra sem $\frac{39}{40}$ a valószínűsége.	1 pont	
Anna tehát nincs kiválasztva $\frac{40}{41} \cdot \frac{39}{40} = \frac{39}{41}$ valószínűséggel (a függetlenség miatt).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül kettőt kiválasztva azok nem ismerik egymást $1 - \frac{38}{39} = \frac{1}{39}$ (lásd b) kérdés megoldását).	1 pont	
Ekkor (a függetlenség miatt) a keresett valószínűség $\frac{39}{41} \cdot \frac{1}{39} = \frac{1}{41}$ . A kért valószínűség tehát $\left(0 + \frac{1}{41}\right) \cdot \frac{1}{41} (\approx 0,0244)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Ha a megoldás indoklása követhetően megjelenik, kevésbé részletes leírás esetén is 6 pont adható.*

<b>8.</b>		
$\{a_n\}$ , ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$ . Ha $n$ páros, akkor $a_n = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n (= 2^{n+1})$ .	1 pont	
Ha $n$ páratlan akkor $a_n = -2^n + 2^n = 0$ .	1 pont	
Az $\{a_n\}$ sorozat tehát nem korlátos nem monoton.	1 pont	
A $\{b_n\}$ sorozatot 3 intervallumon kell vizsgálni: $n < 10$ ; $10 \leq n < 23$ ; $23 \leq n$ .	1 pont	<i>Ha ezt csak a későbbi leírás tükrözi, az 1 pont akkor is jár.</i>
$\{b_n\}$ , ahol $b_n =  n - 23  -  n - 10 $ ; Az abszolútérték értelmezése alapján: Ha $n < 10$ , akkor $b_n = (23 - n) - (10 - n) = 13$ .	1 pont	<i>Nem jár a pont, ha csak a helyes lineáris egyenletet írja fel.</i>
Ha $10 \leq n < 23$ , akkor $b_n = (23 - n) - (n - 10) = -2n + 33$ .	1 pont	<i>Nem jár a pont, ha csak a helyes lineáris egyenletet írja fel.</i>
Ezen a tartományon $-13 < b_n \leq 13$ .	1 pont	
Ha $23 \leq n$ , akkor $b_n = (n - 23) - (n - 10) = -13$ .	1 pont	<i>Nem jár a pont, ha csak a helyes lineáris egyenletet írja fel.</i>
A $\{b_n\}$ sorozat tehát korlátos és monoton csökkenő.	1 pont	
Alsó korlátja: megadhatja a $-13$ -at, vagy bármelyik ennél kisebb számot. Felső korlátja: megadhatja a $13$ -at, vagy bármelyik ennél nagyobb számot.	1 pont	
$\{c_n\}$ , ahol $c_n = \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \right)^2$ . Használjuk az $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot n$ jelölést! Ekkor a négyzetre emelés, a pitagoraszis összefüggés és a kétszeres szögfüggvény képletének alkalmazásával $c_n = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 =$ $= \sin^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha$ .	2 pont*	<i>A helyes négyzetre emelés 1 pont, a pitagoraszis összefüggés helyes alkalmazása és <math>\sin 2\alpha</math> felismerése 1 pont.</i>
Visszaírva $\alpha$ eredeti jelentését kapjuk, hogy: $c_n = 1 + \sin(\pi \cdot n) = 1$ , mivel $\sin(\pi \cdot n)$ értéke minden $n$ egész esetén 0.	1 pont*	
A $\{c_n\}$ sorozat monoton,	1 pont	
és korlátos.	1 pont	
Alsó korlátja: az 1 vagy bármelyik ennél kisebb, felső korlátja: az 1 vagy bármelyik ennél nagyobb szám.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>16 pont</b>	

*A \*-gal jelölt pontok elosztása más megoldás esetén:*

1.  $A \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$  összeg valamelyik tagja mindig 0, ekkor a másik tag pedig 1 vagy  $-1$ , (2 pont) így  $c_n = 1$  minden pozitív egész  $n$  esetén. (1 pont)
2. Az első négy tag kiszámítása (1 pont), majd annak közlése, hogy az összeg tagjainak periodicitása miatt a további tagok mindegyike is 1-gyel egyenlő (1 pont).

*Az alábbi táblázatban összefoglaljuk az áttekinthetőség kedvéért a három sorozat kért tulajdonságait:*

a sorozat	korlátos	monoton
$\{a_n\}; a_n = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$	nem	nem
$\{b_n\}; b_n = \begin{cases} 13, & \text{ha } n < 10 \\ -2n + 33, & \text{ha } 10 \leq n < 23 \\ -13, & \text{ha } 23 \leq n \end{cases}$	igen	igen
$\{c_n\}; c_n = 1$ $n$ összes értékére	igen	igen

<b>9. a)</b>		
Használjuk az ábra jelöléseit!		
<p>A 3 cm sugarú <math>k</math> körlapba belevágni ugyanazzal a köralakú formával azt jelenti, hogy az <math>O</math> középpontú 3 cm sugarú kört eltoljuk 2 cm-rel az <math>\overrightarrow{OK}</math> vektorral. A <math>k</math> körlapból kivágunk egy <math>T</math> tartományt. (A rajzon ez szürkén szerepel.) <math>T</math>-nek szimmetriatengelye a <math>DC</math> és az <math>OK</math> egyenes. A <math>T</math>-t határoló két körív sugara egyaránt 3 cm, középpontjuk az <math>O</math> illetve a <math>K</math> pont. A <math>T</math> tartomány két egybevágó körszeletből áll.</p>	2 pont	<i>Ez a 2 pont a gondolatok követhető megjelenítéséért jár.</i>
<p>Egy ilyen körszelet (pl. a <math>DCB</math>) területét számítjuk ki. <math>t_{\text{körszelet}} = t_{\text{körcikk}} - t_{\text{háromszög}}</math>.</p>	1 pont	
<p>Az <math>ODBC</math> körcikk középponti szöge és az <math>ODC</math> háromszög szárszöge is a <math>DOC</math> szög. Legyen <math>DOC\angle = 2\alpha</math>. Az <math>\alpha</math> nagyságát az <math>FOC</math> derékszögű háromszögből számítjuk ki. <math>OC = 3</math> és <math>OF = 1</math>, innen <math>\cos \alpha = \frac{1}{3}</math>.</p>	1 pont	<i>A továbbiakban a szükséges mennyiségeket két tizedesjegyre kiszámítva adjuk meg,</i>
$\alpha = 1,23$ ( $\alpha = 70,53^\circ$ ).	1 pont	
$\overset{\frown}{DBC} = r \cdot 2\alpha$ (rad) = 7,39,	1 pont	
ahonnan $t_{\text{körcikk}} = \frac{\overset{\frown}{DBC} \cdot r}{2} = 11,07$ (cm <sup>2</sup> ).	1 pont	<i>Fokban mért szöggel számolva:</i> $t_{\text{körcikk}} = \frac{9\pi \cdot 141,06}{360} = 11,07$ .
$t_{\text{háromszög}} = \frac{r^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2} = 2,83$ (cm <sup>2</sup> ); (vagy $t_{\text{háromszög}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ (cm <sup>2</sup> )).	1 pont	
$t_{\text{körszelet}} = 8,25$ (cm <sup>2</sup> );	1 pont	
$t_{\text{holdacska}} = t_{\text{kör}} - 2 \cdot t_{\text{körszelet}} = 11,78$ (cm <sup>2</sup> ).	1 pont	
Egy holdacska felülről látható felületének területe 11,8 cm <sup>2</sup> .	1 pont	<i>A pont a közbülső adatokból kapott eredmény egy tizedesjegyre kerekített értékéért jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	
<i>A részeredmények tetszőleges (legalább egy tizedesjegy) pontosságú helyes kerekítéssel elfogadhatók.</i>		

<b>9. b)</b>		
Minden körlapból lett egy holdacska és egy 2 cm sugarú körlap formájú sütemény. ( $AB = 4\text{ cm}$ )	1 pont	
Klári az eredeti $30 \times 60$ -as téglalapból kivágott 50 darab holdacskát és 50 db 2 cm sugarú kört. A kivágott sütemények alapterülete (közelítő értékekkel számolva): $50 \cdot 11,78 + 50 \cdot 2^2 \cdot \pi = 50 \cdot (11,78 + 12,56) = 1217\text{ cm}^2$ .	1 pont	
A maradék alapterület ekkor $30 \cdot 60 - 1217 = 1800 - 1217 = 583\text{ cm}^2$ .	1 pont	
Ebből négyzet alapú formát kellett készíteni azonos vastagsággal. A négyzet alakúra kinyújtott tészta alapterülete a maradék alapterület, vagyis $583\text{ cm}^2$ .	1 pont	
Ennek a négyzetnek az oldala: $\sqrt{583}$ , azaz (kerekítve) 24 cm.	1 pont	<i>A pont a közbülső adatokból kapott eredmény egészre kerekített értékéért jár.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	<i>A részeredmények tetszőleges (legalább egész) pontosságú helyes kerekítéssel elfogadhatók.</i>