ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2008. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2008. május 6. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!**
Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a – javítatlan – szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?

b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

a)	9 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$$

Ö.:	10 pont	

3. Egy utazási iroda az országos hálózatának 55 értékesítő helyén kétféle utat szervez Párizsba. Az egyiket autóbusszal (A), a másikat repülővel (R). Egy adott turnusra nézve összesítették az egyes irodákban eladott utak számát. Az alábbi táblázatból az összesített adatok olvashatók ki. Pl. az (1;2) „koordinátájú” 5-ös szám azt jelöli, hogy 5 olyan fiókiroda volt, amelyik az adott turnusra 1 db autóbuszos és 2 db repülős utat adott el.

		A típusú eladott utak száma				
		0	1	2	3	4
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2
	1	1	2	2	3	1
	2	1	5	2	4	3
	3	0	3	1	9	2
	4	1	3	3	2	2

a) Összesen hány autóbuszos és hány repülős utat adtak el a vizsgált turnusra az 55 fiókban?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 55 fiókiroda közül véletlenszerűen választva egyet, ebben az irodában 5-nél több párizsi utat adtak el?

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

4. Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18.
Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót (azaz zöldet vagy kéket) húzunk $\frac{1}{15}$-del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége viszont, hogy kék vagy piros golyót húzunk $\frac{11}{10}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk.
Hány zöld és hány kék golyó van az urnában?

Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes.

Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Írja fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú, és

a) az alapja az x tengelyre illeszkedik;

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6.

a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Annának az IWIW-en 40 ismerőse van. (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.)
Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást?

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást?

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;

$\{b_n\}$, ahol $b_n = |n-23| - |n-10|$;

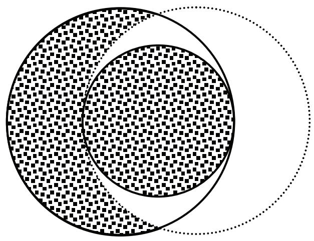
$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$.

Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!

Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Klári teasüteményt sütött. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm × 60 cm méretű téglalap.
Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából.
Ezután a körlapokból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontját a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)



Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből – egy másik szaggatóval – kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.

a) Hány cm^2 területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm × 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredményt egészre kerekítve adja meg!)

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	13		**51**	
	2.	10			
	3.	14			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
			MINDÖSSZESEN	**115**	

dátum

javító tanár

	elért pontszám	programba beírt pontszám
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző