

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2007. május 8.**

# **MATEMATIKA**

## **KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS  
MINISZTERIUM**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. (Ha a vizsgázó nem jelölte ki az értékelendő változatot, a javító tanár a legutolsó megoldási próbálkozást értékeli!)
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitzűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitzűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

**I.**

<b>1.</b>		
$a - 2$	2 pont	<i>Ha csak az egyik tényezővel egyszerűsít, 1 pontot kaphat.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>2.</b>		
A feltételből $32q^4 = 2$ , ahonnan	1 pont	
$q_1 = \frac{1}{2} \quad (= \sqrt[4]{0,0625})$ ,	1 pont	
$q_2 = -\frac{1}{2}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>3 pont</b>

<b>3.</b>		
1. állítás: Igaz.	1 pont	
2. állítás: Hamis.	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>4.</b>		
Ha Bea most $x$ éves, akkor $2,5x = 45$ ,	2 pont	
ahonnan $x = 18$ .	1 pont	<i>Hibásan felírt egyenlet megoldása nem ér pontot.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>3 pont</b>

<b>5.</b>		
Maximuma van,	1 pont	
szélsőérték helye: 1;	1 pont	<i>Ha hibás vagy pontatlan válaszokban (pl. <math>P(1;4)</math>) jó gondolatok megjelennek, 1 pont adható.</i>
szélsőérték értéke: 4.	1 pont	
<b>Összesen:</b>		<b>3 pont</b>

<b>6.</b>		
Bármelyik jól megadott intervallum. Pl.: $a \leq x \leq b$ vagy $[a ; b]$ alakban.	2 pont	<i>Ha helyes végpontú, de nem zárt intervallumot ad meg a vizsgázó, akkor 1 pontot kap.</i>
<b>Összesen:</b>		<b>2 pont</b>

<b>7.</b>		
Minden valós szám, kivéve 2 és $-2$ .	2 pont	$x \neq \pm 2$ válasz is elfogadható.
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	
<i>Hibás jelölésű, de mindkét helyes választ tükröző megoldásra 1 pont adható.</i>		

<b>8.</b>		
$\frac{x}{4,8} = \frac{\sin 56^\circ}{\sin 41^\circ}$ .	1 pont	
$x \approx 6,1$ cm.	2 pont	<i>Hibás kerekítés esetén 1 pont adható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>9.</b>		
$x = -16$ .	2 pont	<i>A pontszám nem bontható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>10.</b>		
Módusz: 4.	1 pont	
Medián: 3.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>11.</b>		
$x = \frac{1}{4} (= 0,25)$ .	2 pont	
Számegyenesen ábrázolás.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>12.</b>		
Összesen 16 db hattal osztható szám van a megadott tartományban, közülük 4 db osztható 8-cal.	2 pont	
A valószínűség: $\frac{4}{16} (= 25 \%)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

## II/A

**13. a)**

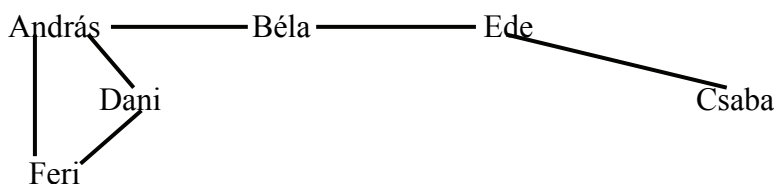
$7 + x < -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 3x < -3,$	1 pont	
ahonnan $x < -1. (A = ]-\infty; -1[).$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

**13. b)**

Az $x^2 + x - 6 = 0$ egyenlet gyökei: $-3; 2.$	2 pont	
Mivel a főegyüttható pozitív,	1 pont	<i>A grafikon vázlata is jó indoklás.</i>
ezért $-3 \leq x \leq 2. (B = [-3; 2]).$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

**13. c)**

$A \cup B = ]-\infty; 2].$	2 pont	<i>Ha csak az intervallumok nyíltságát vagy zártságát egy halmaz esetén hibázza el, akkor 1 pontot, ha több halmaznál, akkor 2 pontot veszítsen.</i>
$A \cap B = [-3; -1[.$	2 pont	
$B \setminus A = [-1; 2].$	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	
<i>A kért halmazok bármilyen követhető formában való helyes megadása (számszerűen, szöveggel stb.) esetén járnak a megfelelő pontok.</i>		

**14. a)**

A gráf helyes felrajzolása.	4 pont	<i>Egy hiba esetén 2 pontot kap, több hiba esetén nem jár pont.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

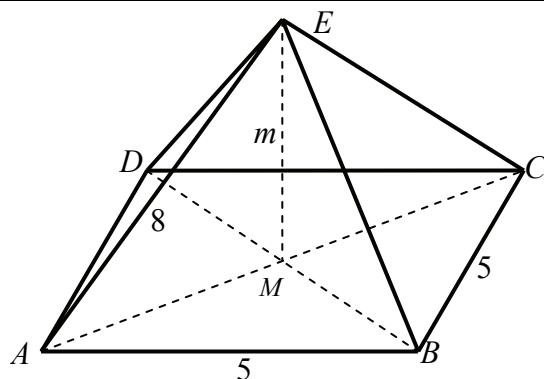
**14. b)**

Ha mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor a mérkőzések száma $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$	2 pont	
6 mérkőzést már lejátszottak, ezért 9 mérkőzés van még hátra.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha hibás adatokkal, de elvileg helyesen számol.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	<i>Rajzról leolvasott helyes értékekért is jár a 3 pont.</i>

---

<b>14. c)</b>		
Ha Dani az első helyen végez, akkor a többiek $5! = 120$ -féleképpen „követhetik”.	2 pont	
Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha Dani második.	2 pont	
Így a kérdéses lehetőségek száma: 240.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

**15. a)**



1 pont

A test magassága  $m$ .

A négyzet átlójának fele:  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  (cm).

1 pont

$m = \sqrt{64 - 12,5} (\approx 7,2 \text{ cm})$ .

1 pont

A gúla alakú gyertya térfogata:

$$V = \frac{T_a \cdot m}{3} \approx \frac{5^2 \cdot 7,2}{3} \approx 60 \text{ cm}^3.$$

1 pont

**Összesen:**

**4 pont**

*Követhető jó megoldás ábra nélkül is teljes értékű.*

**15. b)**

Az  $x$  térfogatú viasznak a 94%-a adja a 130 db gyertya térfogatát:  
 $0,94 \cdot x = 130 \cdot V$ .

2 pont

*1,06 \cdot 130V elvi hibás, nem adható meg a 2 pont.*

$$x = \frac{130}{0,94} \cdot 60 \approx 8298 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

1 pont

8,3 liter viaszra van szükség.

1 pont

**Összesen:**

**4 pont**

**15. c)**

Az oldallap magassága (Pitagorasz tételéből):

$$m_o = \sqrt{8^2 - 2,5^2} (\approx 7,60 \text{ cm}).$$

1 pont

A palást területe:  $P = 4 \cdot \frac{5 \cdot m_o}{2} = 10m_o (\approx 76 \text{ cm}^2)$ .

1 pont

A gúla felszíne:  $A = 5^2 + P \approx 101 \text{ (cm}^2\text{)}.$

1 pont

A teljes felhasznált papírmennyiség:  $1,36 \cdot 40 \cdot A = 1,36 \cdot 40 \cdot 101 \approx 5494 \text{ (cm}^2\text{)}.$

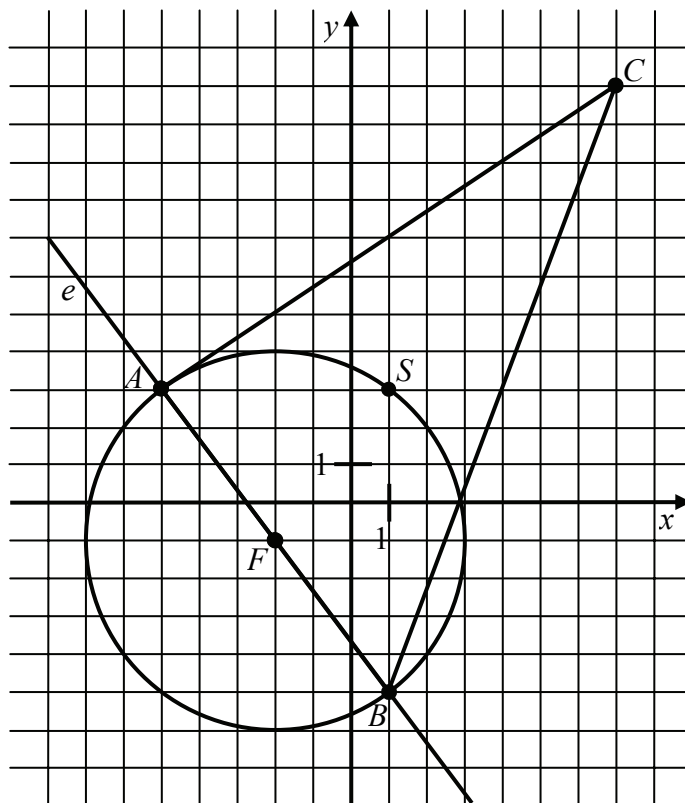
1 pont

**Összesen:**

**4 pont**

**II/B**

**16. a)**



Mivel $4 \cdot 100 + 3 \cdot (-136) \neq -11$ , ezért a $P$ pont nincs az egyenesen.	1 pont	
Az $e$ egyenes ábrázolása.	1 pont	
A $Q$ pontra: $4x + 3 \cdot 107 = -11$ ,	1 pont	
ahonnan a $Q$ pont abszcisszája: $x = -83$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

**16. b)**

Az $AB$ szakasz felezőpontja $F$ . $F(-2; -1)$ .	2 pont	
A kör sugara: $r =  \overrightarrow{AF}  = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-3)^2} = 5$ .	2 pont	
A kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ .	2 pont	
Mivel $(1+2)^2 + (3+1)^2 = 25$ , ezért az $S$ pont rajta van a körön.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	



<b>16. c) első megoldás</b>		
A $C$ pont koordinátái: $(x_c; y_c)$ . S koordinátáira felírható: $1 = \frac{-5+1+x_c}{3}$ ; $3 = \frac{3+(-5)+y_c}{3}$ .	3 pont	<i>A képlet használatának felismerése 1 pont, egyik és másik koordinátára való alkalmazás 1-1 pont.</i>
Ahonnán $x_c = 7$ ,	1 pont	
$y_c = 11$ ,	1 pont	
tehát $C(7; 11)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>16. c) második megoldás</b>		
A háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.	1 pont	
$\vec{FS} = \underline{s} - \underline{f} = (1; 3) - (-2; -1) = (3; 4)$ .	1 pont	
$\vec{SC} = 2\vec{FS} = 2 \cdot (3; 4) = (6; 8)$ ,	1 pont	
amelyet $\underline{s}$ vektorhoz hozzáadva megkapjuk a $C$ pont koordinátáit:	1 pont	
$\underline{c} = \underline{s} + \vec{SC} = (1; 3) + (6; 8) = (7; 11)$ , tehát $C(7; 11)$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>17. a)</b>		
A tengelyre kerülő adatok elnevezése.	1 pont	
<p>tanulók száma</p> <p>Ábrázolás.</p>	2 pont	<i>Minden elvileg helyes ábrázolás (pl.: a tengelyek felcserélése, összeérő oszlopok) is elfogadható. Az oszlopokon az értékek feltüntetése elhagyható.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>17. b)</b>		
A középértékekkel számított átlag: $\frac{3 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 17 \cdot 5 + 15 \cdot 7 + 4 \cdot 9}{50} = \frac{262}{50} =$	2 pont	
= 5,24. A tanulók tehát átlagosan 5,24 órát ( $\approx$ 5 óra 14 perc) töltenek a biológia házi feladatok megoldásával hetente.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>17. c)</b>		
50 tanuló közül $\binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$ -féleképpen lehet két tanulót kiválasztani.	2 pont	
A két évfolyamból 30, illetve 20-féleképpen lehet egy-egy tanulót kiválasztani, így a kedvező esetek száma: $30 \cdot 20 = 600$ .	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $p = \frac{600}{1225} = \frac{24}{49} (\approx 0,49)$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>17. d)</b>		
Hetente legalább 4 órát 36 tanuló tölt a biológia házi feladatok megoldásával.	1 pont	
Közülük két tanulót $\binom{36}{2} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630$ -féleképpen lehet kiválasztani.	2 pont	
Így a keresett valószínűség: $p = \frac{630}{1225} = \frac{18}{35} (\approx 0,51)$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>18. a)</b>		
A háromjegyű szám számjegyei: $a - d$ ; $a$ ; $a + d$ , ahol $a$ a számtani sorozat középső tagja, $d$ a differencia.	1 pont	
Felírható: $100(a - d) + 10a + a + d = 53,5 \cdot 3a$ , (1)	2 pont	
és $[100(a - d) + 10a + a + d] -$ $- [100(a + d) + 10a + a - d] = 594$ . (2)	2 pont	
A (2) egyenletből: $-198d = 594$ ,	1 pont	
ahonnan $d = -3$ .	1 pont	
Az (1) egyenletből: $111a - 99d = 3 \cdot 53,5a$ ,	1 pont	
ahonnan $a = -2d$ .	1 pont	
$a = -2 \cdot (-3) = 6$ a középső számjegy, a háromjegyű szám: 963.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	<i>Az ellenőrzést külön nem értékeljük.</i>

<b>18. a) (más jelöléssel)</b>		
A háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében: $a$ ; $a + d$ ; $a + 2d$ , ahol $a$ a számtani sorozat első tagja, $d$ a differencia.	1 pont	
$100a + 10(a + d) + a + 2d = 53,5 \cdot 3 \cdot (a + d)$ , (1)	2 pont	
$[100a + 10(a + d) + a + 2d] -$ $- [100(a + 2d) + 10(a + d) + a] = 594$ (2)	2 pont	
A (2) egyenletből: $-198d = 594$ ,	1 pont	
ahonnan $d = -3$ .	1 pont	
Az (1) egyenletből: $111a + 12d = 3 \cdot 53,5(a + d)$ ,	1 pont	
ahonnan $a = -3d$ .	1 pont	
$a = -3 \cdot (-3) = 9$ az első számjegy. A háromjegyű szám: 963.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	<i>Az ellenőrzést külön nem értékeljük.</i>
<i>Ha a vizsgázó felsorolja az összes számításba jövő háromjegyű számot (5 pont), kiválasztja a helyes számot (2 pont), megmutatja, hogy más nem lehet (3 pont), teljes pontszám jár.</i>		

<b>18 b)</b>		
A megfelelő számok: 234; 345; 456; 567; 678; 789; 246; 357; 468; 579; 258; 369.	4 pont	<i>Minden 3 db helyesen megadott szám 1 pontot ér. Ha a felsorolásban nem megfelelő szám is megjelenik, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	
<i>Azok a vizsgázók, akik nem csak olyan háromjegyű számokat vettek számba, amelyeknek a számjegyei a feltételeknek megfelelő számtani sorozat szomszédos tagjai, hanem a sorozatokból tetszőleges, nem csak szomszédos tagokat szerepeltettek (pl. 368, 457, 569 stb.), és azokat számolták össze, 56 esetet kellett, hogy felsoroljanak. Ekkor a pontozás: a gondolat megjelenése 1 pont, ha az esetek legalább fele szerepel, 1 pont, ha az összes esetet felsorolja, 2 pont (összesen 4 pont). Ha a felsorolásban nem megfelelő szám is megjelenik, akkor legfeljebb 3 pont adható.</i>		

---

<b>18. c)</b>		
Közülük 9-cel osztható: 234; 369; 468; 567.	1 pont	
A jó esetek száma 4; az összes eset 12.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	
<i>Az 56 szám közül 7 darab osztható 9-cel (234; 279; 369; 378; 459; 468; 567), 1 pont.</i>		
<i>A keresett valószínűség: <math>\frac{7}{56} = \frac{1}{8}</math>, 2 pont (összesen 3 pont).</i>		